Material de Apoio a disciplina de Álgebra e Geometria Computacional

MATRIZES

1. DEFINIÇÃO

Denominamos matriz de ordem m x n (lê-se m por n) o conjunto de números reais dispostos em um quadro de **m linhas** (disposições horizontais) e **n colunas** (disposições verticais). Algebricamente uma matriz A pode ser indicada por:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \textbf{Linhas}$$

$$\downarrow \textbf{Colunas}$$

O elemento a_{ij} dotado de dois índices onde o primeiro, i, indica a linha e o segundo, j, indica a coluna, às quais o elemento a_{ij} pertence.

2. CLASSIFICAÇÃO DAS MATRIZES

2.1 - **Matriz nula:**

È a matriz que tem todos os seus elementos iguais a zero.

2.2 – **Matriz quadrada:**

È a matriz que tem o numero m linhas iguais o numero n de colunas.

2.3 – **Matrizes identidade**

A matriz quadrada de ordem n, em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são iguais a 0.

Representamos a matriz identidade por I_n.

Exemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

2.4- Matriz oposta $\rightarrow$ Seja A_{mXn} uma matriz qualquer, chamamos de matriz oposta de A e indicamos $(-A_{mXn})$, aquela matriz onde cada elemento correspondente ao da matriz A é o oposto a ele.

Exemplo:

$$A_{2X4} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 & -5 \\ -6 & -8 & -7 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{logo,} \quad -A_{2X4} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 6 & 8 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

2.5- Lei de Formação de uma matriz: É uma regra que define como será o elemento de uma matriz qualquer.

Exemplo: Construa a matriz $\mathbf{a_{3X2}}$ onde $\mathbf{a_{ij} = 2i + j}$.

<u>**Resolução**</u>**:** Temos a matriz $A_{3X2} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$**,** portanto...

- $\mathbf{a_{11} = 2(1) + (1) = 2 + 1 \Rightarrow a_{11} = 3}$
- $\mathbf{a_{12} = 2(1) + (2) = 2 + 2 \Rightarrow a_{12} = 4}$
- $\mathbf{a_{21} = 2(2) + (1) = 4 + 1 \Rightarrow a_{21} = 5}$
- $\mathbf{a_{22} = 2(2) + (2) = 4 + 2 \Rightarrow a_{22} = 6}$
- $\mathbf{a_{31} = 2(3) + (1) = 6 + 1 \Rightarrow a_{31} = 7}$
- $\mathbf{a_{32} = 2(3) + (2) = 6 + 2 \Rightarrow a_{32} = 8}$

Logo... $A_{3X2} = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{Vmatrix}$

3. IGUALDADE DE MATRIZES

Duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ do tipo m x n são iguais quando apresentarem todos os números correspondentes iguais.
Um número de A é correspondente de B, quando ocupa a mesma posição em sua tabela.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a_{11} = b_{11} = c_{11} = \ldots} \\ \mathbf{a_{21} = b_{21} = c_{21} = \ldots} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \mathbf{a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = \ldots} \end{aligned}$$

Exemplo:

Sejam as matrizes A = $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}_{2X3}$ e **B** = $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}_{2X3}$

Como...

● $\mathbf{a_{11} = b_{11}}$ ● $\mathbf{a_{21} = b_{21}}$
● $\mathbf{a_{12} = b_{12}}$ ● $\mathbf{a_{22} = b_{22}}$
● $\mathbf{a_{13} = b_{13}}$ ● $\mathbf{a_{23} = b_{23}}$

Logo **A** = **B**.

Exercícios

1) Determinar a, b, c e d para que se tenha $\begin{pmatrix} -1 & \frac{-5}{6} \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{a} & \text{5b} \\ \frac{\text{c}}{3} & \text{- d} \end{pmatrix}$

2) Determinar x, y e z que satisfaçam $\begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 3y & 5 & z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{4} \\ -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

3) Determine p e q, tais que $\begin{pmatrix} p+q & -2 \\ 0 & 2p-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4) Verifique se existir m, m $\in \Re$, para que se tenha $\begin{pmatrix} 2 & m & -9 \\ m-3 & m+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) Verifique se existir m, m $\in \Re$, se existir $\begin{pmatrix} 4-m^2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 3 \end{pmatrix}$

6) Seja $A = (\mathrm{a}_{2x3})$em que a_{2x3} = i + j. Determine m, n, e p em B = $\begin{pmatrix} m+n & 3 & 4 \\ n-1 & m-2p & 5 \end{pmatrix}$, a fim que tenhamos A = B.

7) Determine x e y reais de modo que $\begin{pmatrix} 2^x - 1 & y^4 \\ y^x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Correção dos exercicios

1) Determinar a, b, c e d para que se tenha $\begin{pmatrix} -1 & \frac{-5}{6} \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{a} & \text{5b} \\ \frac{\text{c}}{3} & \text{- d} \end{pmatrix}$

a = -1 ; b = $-\frac{1}{6}$; c = 6; d = - 10

2) Determinar x, y e z que satisfaçam $\begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 3y & 5 & z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{4} \\ -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

x = $\frac{3}{4}$**; y = -2 ; z = 1**

3) Determine p e q, tais que $\begin{pmatrix} p+q & -2 \\ 0 & 2p-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

p = 3; q = 3

4) Verifique se existir m, m $\in \Re$, para que se tenha $\begin{pmatrix} 2 & m-9 \\ m-3 & m+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Não existe m $\in \Re$

5) Verifique se existir m, m$\in \Re$, se existir $\begin{pmatrix} 4-m^2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 3 \end{pmatrix}$

m = -2

6) Seja $A = (\mathrm{a}_{2x3})$em que a_{2x3} = i + j. Determine m, n, e p em B = $\begin{pmatrix} m+n & 3 & 4 \\ n-1 & m-2p & 5 \end{pmatrix}$, a fim que tenhamos A = B.

m = -2 ; n = 4 ; p = -3

7) Determine x e y reais de modo que $\begin{pmatrix} 2^x - 1 & y^4 \\ y^x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

x = 1 ; y = -1

4. MATRIZ TRANSPOSTA

Uma matriz B é a matriz transposta da matriz A, se as linhas de B forem ordenadamente as colunas de A.

Propriedades da Matriz Transposta

I) $(A + B)^T = A^T + B^T$
II) $(A)^T = A^T$

III) $(A^T)^T = A$
IV) $(AB)^T = B^T A^T$

5. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO ENTRE MATRIZES

Dado as matrizes *A* e *B* do tipo *m* x *n*, sua **soma ou subtração** A + B ou A – B é a matriz *m* por *n* dos elementos correspondentes: $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ ou $(A-B)_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & a_{14}+b_{14} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & a_{24}+b_{24} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & a_{34}+b_{34} \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} & a_{14}-b_{14} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} & a_{24}-b_{24} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} & a_{34}-b_{34} \end{pmatrix}$$

Exemplo: Ao utilizar matrizes, surge naturalmente a necessidade de efetuarmos certas operações. Por exemplo, consideremos as tabelas, que descrevem a produção de grãos em dois anos consecutivos.

Produção de grãos (em milhares de toneladas durante o primeiro ano)

	Soja	feijão	arroz	Milho
Região A	4000	200	400	600
Região B	800	300	700	100
Região C	1000	100	500	800

Produção de grãos (em milhares de toneladas durante o segundo ano)

	Soja	feijão	Arroz	Milho
Região A	2000	20	250	300
Região B	5000	100	350	0

Região C	3000	150	650	650

Se quisermos montar uma tabela que dê a produção por produto e por região nos dois anos conjuntamente, teremos que somar os elementos correspondentes as duas tabelas anteriores.

$$\begin{bmatrix} 4000 & 200 & 400 & 600 \\ 800 & 300 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 & 20 & 250 & 300 \\ 5000 & 100 & 350 & 0 \\ 3000 & 150 & 650 & 650 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 & 220 & 650 & 900 \\ 5800 & 400 & 1050 & 100 \\ 4000 & 250 & 1150 & 1450 \end{bmatrix}$$

Produção de grãos (em milhares de toneladas durante os dois anos)

	soja	feijão	Arroz	Milho
Região A	6000	220	650	900
Região B	5800	400	1050	100
Região C	4000	250	1150	1450

A soma de duas matrizes A = $[a_{ij}]$ e B = $[b_{ij}]$, de ordem (m,n), é uma matriz C = $[c_{ij}]$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Propriedades da Adição de Matrizes

I. A + (B + C) = (A + B) + C
II. A + 0 = 0 + A = A
III. - A + A = A - A = 0
IV. A + B = B + A

6. MULTIPLICAÇÃO DE UM ESCALAR POR MATRIZ

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Podemos efetuar a multiplicação de um escalar por uma matriz. Por exemplo:

$$-2A = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -2 \\ 6 & 10 & -6 \end{bmatrix}$$

7. MULTIPLICAÇÃO ENTRE MATRIZES

Suponhamos que a seguinte tabela forneça as quantidades das vitaminas A, B e C obtidas em cada unidade dos alimentos I e II.

	A	B	C
Alimento I	4	3	0
Alimento II	5	0	1

Na forma de matriz $\rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se ingerirmos cinco unidades do alimento I e duas unidades do alimento II, quanto consumiremos de cada tipo de vitamina?

Podemos representar o consumo dos alimentos I e II (nesta ordem) pela matriz "consumo" [5 2]

A operação que vai nos fornecer a quantidade ingerida de cada vitamina é o "produto":

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.4 + 2.5 & 5.3 + 2.0 & 5.0 + 2.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

Isto é, serão ingeridas 30 unidades da vitamina A, 15 de B e 2 de C.

- **Condição necessária**

O número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B.

- **A ordem da matriz resultante C**

É dada pelo número de linhas de A e pelo número de colunas de B.

A (1, 4) B (4, 1)

- **Operação de multiplicação**

Multiplica-se o 1º elemento de A pelo 1º elemento de B, o 2º elemento de A pelo 2º elemento de B, 3º elemento de A pelo 3º elemento de B, etc. e soma-se os produtos.

Exemplo 1: Sejam as matrizes A $_{(1,4)}$ e B$_{(4,1)}$:

$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{1x4}$ e $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}_{4x1}$ **A (1,4) x B (4,1) = C(1,1)**

Como a número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, é possível realizar a multiplicação.

C = [1 1] = [4.6 + 3.4 + 2.5 + 5.3] = [6 1]

Exemplo 2: Seja uma matriz A de ordem (2,3) e B de ordem (3,4), calcular a matriz produto C:

A (2, 3) e B (3, 4) = C (2,4)

Como a número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, é possível realizar a multiplicação.

Considere:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

c_{11} = 4x5 + 2x2 + 6x1 = 30

c_{12} = 4x2 + 2x3 + 6x2 = 26

c_{13} = 4x4 + 2x1 + 6x7 = 60

c_{14} = 4x1 + 2x0 + 6x6 = 40

c_{21} = 2x5 + 5x2 + 3x1 = 23

c_{22} = 2x2 + 5x3 + 3x2 = 25

c_{23} = 2x4 + 5x1 + 3x7 = 34

c_{24} = 2x1 + 5x0 + 3x6 = 20

Portanto, o produto das matrizes A $_{(2,3)}$ e B$_{(3,4)}$ é a matriz:

$$C_{(2,4)} = \begin{bmatrix} 30 & 26 & 60 & 40 \\ 23 & 25 & 34 & 20 \end{bmatrix}$$

- **Propriedades da Multiplicação de uma Matriz por Outra**

1. Dadas as matrizes A, B, C de ordem (m,n), (n,p) e (p,r), respectivamente, tem-se:

   (AB) C = A (BC)

2. Dadas as matrizes A, B, C de ordem (m, n), (m, n) e (n, p), respectivamente, tem-se:

   (A+B) C = AC + BC

3. Dadas as matrizes A, B, C de ordem (n, p), (n, p) e (m, n), respectivamente, tem-se:

   C (A+B) = CA + CB

4. Dadas as matrizes A e B de ordem (m, n) e (n, p), respectivamente, tem-se para todo número l:

   (l A)B = A (l B) = l (AB)

5. A multiplicação matricial não é, em geral, comutativa.

   A x B não é sempre igual B x A

6. Dadas duas matrizes A e B, se o produto delas for a matriz zero [0], não é necessário que A ou B sejam matrizes zero.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entretanto, se A x B = 0 qualquer que seja B, então A = 0. Do mesmo modo, se A x B=0 qualquer que seja A, então B = 0.

Exercícios de Fixação

1) Seja as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$, calcular

a) A + B
b) AC
c) BC
d) CD
e) DA
f) DB
g) 3. A
h) – D
i) D.(2A + 3B)

2) Escreva a matriz quadrada de dimensão 3x3 onde os elementos aij satisfazem a relação aij = 2i + j

3) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

Pede-se:

a) Calcular A + B - C
b) Encontrar a matriz X tal que X + A - B = 0

4) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 25 \end{bmatrix}$

a) determinar a matriz X tal que 3X + A - 2B = 0
b) determinar AB
c) determinar 3BA

5) Sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Calcular os produtos AB e BA e verificar que eles são diferentes.

6) Determinar a matriz X na equação $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. X = $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 13 \end{bmatrix}$

7) Calcular o produto da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8) Ache a matriz A do tipo 2 X 3 definida por $a_{ij} = 3i + 4j$

9) Obter a matriz A = $(a_{ij})_{2x2}$ definida por a_{ij} = 3 i - j.

10) Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 e A^t sua transposta, determine A, tal que A = 2 A^t.

11) Sobre as sentenças:

I. O produto das matrizes $A_{3\,x\,2}$. $B_{2\,x\,1}$ é uma matriz 3 x 1.

II. O produto das matrizes $A_{5\,x\,4}$. $B_{5\,x\,2}$ é uma matriz 4 x 2.

III. O produto das matrizes $A_{2\,x\,3}$. $B_{3\,x\,2}$ é uma matriz quadrada 2 x 2

É verdade que:

a) somente I é falsa;

b) somente II é falsa;

c) somente III é falsa;

d) somente I e III são falsas;

e) I II e III são falsas

12) Calcule

a) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

13) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule $\left(A + \mathrm{B}^t\right).\left(\mathrm{A}^t - \mathrm{B}\right)$.

14) Dada a matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule A^2

15) Dados $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, calcule AB e BA, mostrando que AB ≠ BA.

16) Calcular o produto da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17) Obter a matriz A = $(a_{ij})_{2x2}$ definida por $a_{ij} = 3\,i - j$.

18) Se $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcular MN – NM.

19) Se a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então calcular a matriz $A = \left(A^t\right)^2$

20) São dadas as matrizes $A = \left(a_{ij}\right) \text{e } B = \left(b_{ij}\right)$, quadradas de ordem 2 com $a_{ij} = 3i + 4j$ e $b_{ij} = -4i - 3j$. Se C = A + B, então calcular C^2.

21) Obter a matriz **A = $(a_{ij})_{2x2}$** definida por **$a_{ij} = 3i - j$**.

22) Na confecção de três modelos de camisas (A, B e C) são usados botões grandes (G) e pequenos (p). O número de botões por modelos é dado pela tabela:

	Camisa A	**Camisa B**	**Camisa C**
Botões p	**3**	**1**	**3**
Botões G	**6**	**5**	**5**

O número de camisas fabricadas, de cada modelo, nos meses de maio e junho, é dado pela tabela:

	Maio	**Junho**
Camisa A	**100**	**50**
Camisa B	**50**	**100**
Camisa C	**50**	**50**

Nestas condições, obter a tabela que dá o total de botões usados em maio e junho.

23) Sobre as sentenças:

I. O produto das matrizes $A_{3 \times 2}$. $B_{2 \times 1}$ é uma matriz 3 x 1.

II. O produto das matrizes $A_{5 \times 4}$. $B_{5 \times 2}$ é uma matriz 4 x 2.

III. O produto das matrizes $A_{2 \times 3}$. $B_{3 \times 2}$ é uma matriz quadrada 2 x 2

É verdade que:

a) somente I é falsa;

b) somente II é falsa;

c) somente III é falsa;

d) somente I e III são falsas;

e) I, II e III são falsas.

24) Se A é uma matriz 3 x 4 e B uma matriz n x m, então:

a) existe A + B se, e somente se, n = 4 e m = 3;

b) existe AB se, e somente se, n = 4 e m = 3;

c) existem AB e BA se, e somente se, n = 4 e m = 3;

d) existem, iguais, A + B e B + A se, e somente se, A = B;

e) existem, iguais, AB e BA se, e somente se, A = B.

25) Calcule

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

26) Sejam as matrizes A = (a_{ij}) em que a_{ij} = i + 2j, e B = $(b_{ij})_{3\times 2}$ em que b_{ij} = 1 + i + j.

a) Determine a matriz A + B.
b) Determine a matriz D = A – B

27) Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Determine a matriz A + B + C.

28) Resolva as seguintes equações matriciais.

a) $X + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $X - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

29) Determine a matriz X em $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = X - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

30) Sejam as matrizes A = $(a_{ij})_{7\times 9}$, em que a_{ij} = 2i – j e B = $(b_{ij})_{7\times 9}$ em que b_{ij} = i + j. Seja C = A + B, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Determine os elementos:

a) C_{21}
b) C_{63}

31) Resolva o sistema matricial $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \end{cases}$

32) Resolva o sistema matricial $\begin{cases} X + Y + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Respostas dos exercícios

1)

a) A + B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) AC = $\begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) BC = $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) CD = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$

e) DA = $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

f) DB= $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) 3A = $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

h) – D = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -21 & 10 & 13 \end{pmatrix}$

2) A = $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

3)

a) A + B – C = $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

b) X + A – B = $\begin{pmatrix} -6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

4)

a) 3X + A - 2B = $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{49}{3} \end{pmatrix}$

b) AB = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 25 \end{pmatrix}$

$c)\ 3BA = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 15 \\ 3 & 12 & 75 \end{pmatrix}$

5) AB = $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$

BA = $\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

6) a = 1, b = 2, c = 5

7) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 2a & 2c \\ 2b & 2d \end{pmatrix}$

11) b

12)

a) $\begin{pmatrix} 21 \\ -11 \end{pmatrix}$

b) (17)

c) { }

d) $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$e)\begin{pmatrix}10 & 1\\ -1 & 13\end{pmatrix}$$

f) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix}3 & -3 & 0\\ 3 & -6 & 8\\ 6 & -12 & 16\end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

15) a) $\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 9 & 6\end{pmatrix}$

16) $\begin{pmatrix}7 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ -4 & -2 & 0\end{pmatrix}$

$$17)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$$

$$18)\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

19) **a = 2a ; b= 2c ; c = 2b ; d = 2d**

$$20)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$21)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$$

22)

	Maio	**Junho**
Botões p	**500**	**400**
Botões G	**1100**	**1050**

23) b

24) a é falsa

25)

$$a)\begin{pmatrix} 5 & -2 & -\frac{5}{2} \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b)\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

26)

$$a)\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 11 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$b)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$27)\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

28)

$$a)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$b)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$29)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

30) $C_{21} = 6$

$C_{63} = 18$

31)

$$a)\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$b)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

A matriz quadrada M, de ordem **n**, admite inversa se, e somente se, det M ≠ 0. Neste caso a matriz M é chamada INVERSÍVEL. A sua inversa, que também é quadrada de ordem **n** e é representada por $\mathbf{M^{-1}}$, além de existir, é única e é definida por:

$$\boxed{\mathbf{A \times A^{-1} = I}}$$

Demonstra-se que: "Se **A** e **B** forem duas matrizes quadradas de ordem **n**, tais que $\mathbf{A \,.\, B = I_n}$, então, necessariamente, $\mathbf{B \,.\, A = I_n}$ e, portanto, $\mathbf{A \,.\, B = B \,.\, A = I_n}$." Por este motivo, apesar da exigência da definição, $\mathbf{A \,.\, B = I_n}$ é condição suficiente para **A** e **B** serem inversas uma da outra**.**

Simbolicamente:

$$\boxed{A \,.\, B = I_n \Longrightarrow B = A^{-1} \text{ e } A = B^{-1}}$$

Exemplo:

A matriz inversa de $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$, por exemplo, é do tipo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, e da definição decorre que:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4a+c & 4b+d \\ 11a+3c & 11b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a + c = 1 \\ 11a + 3c = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 4b + d = 0 \\ 11b + 3d = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 3 \\ c = -11 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} b = -1 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$\text{M}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{bmatrix}$$

Assim sendo o processo apresentado, embora simples e claro por utilizar apenas a definição, é muito trabalhoso, pois depende de um modo geral, da resolução de n sistemas e de n equações a n incógnitas.

1) Obter a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, se existir.

Supondo que $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a matriz inversa da matriz *A*, temos:

$$AxB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{cases} 3a + c = 1 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3b + d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas: *a* = 1 *b* = –1 c = –2 e *d* = 3

Logo: $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Calculando:

$$BxA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto a matriz *A* é inversível e sua inversa é a matriz:

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriedades da matriz inversa

Considerando-se *A* uma matriz inversível, possui as seguintes propriedades:

I - A matriz inversa é única. Esta propriedade é decorrente do conjunto das matrizes quadradas *n* x *n* com a operação binária de multiplicação de matrizes formar um monóide.

II - A matriz inversa de uma matriz inversível é também inversível, sendo que a inversa da inversa de uma matriz é igual à própria matriz.

III - A matriz transposta de uma matriz inversível é também inversível, e a inversa da transposta é a transporta da inversa:

IV - O produto de uma matriz inversível por sua transposta é também inversível.

V - O inverso de uma matriz multiplicada por um número (diferente de zero) é igual à matriz inversa multiplicada pelo inverso desse número.

VI - O inverso do produto de matrizes inversível é igual ao produto das inversas dessas matrizes com a ordem trocada.

VII - O determinante de uma matriz inversível é diferente de zero.

Exercícios

1) Verifique se $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Determine, se existir, a matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, Determine 10. A^{-1}.

4) Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, determine:

a) $A + A^{-1}$

b) $(A^{-1})^2 + A^{-1}$

5) Determine a matriz inversa, se existir, da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

6) A inversa de $A = \begin{pmatrix} y & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix}$ é a matriz $\begin{pmatrix} x & x-4 \\ x-5 & 1 \end{pmatrix}$. Determine x e y.

7) Determine a matriz inversa de $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

8) Determine a inversa de $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9) Usando a definição de matriz inversa, resolva a equação A. X = B, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

10) Determine a matriz inversa

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

11) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, escreva a matriz B, tal que A . B = I.

R. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

12) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, determine X = (A . B^{-1})^t.

R. $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

LISTA DE EXERCICIOS EXTRAS

1.) Construa as matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{3x2}$ tal que $a_{ij} = (i - j)^3$.

b) $B = (b_{ij})_{4x2}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i \leq j \\ i - j, \text{ se } i > j \end{cases}$.

2.) Achar os elementos das diagonais principal e secundária da matriz $A=(a_{ij})_{3x3}$ nos casos abaixo:

a) $a_{ij} = 3i - j$

b) $a_{ij} = 5i^2 - 2j$

3.) Calcule a soma dos elementos da 2ª coluna da matriz $A = (a_{ij})_{2x3}$, em que $a_{ij} = 2i + j - 1$.

4.) Determine a soma dos elementos da diagonal principal com os elementos da diagonal secundária da matriz A de ordem 4 em que $a_{ij} = i - j$.

5.) Sendo $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$. Determine A^t.

6.) Sendo $A=\begin{bmatrix} 11 & 15 \\ 22 & -7 \end{bmatrix}$. Determine A^t e $(A^t)^t$. Que conclusão você chegou?

7.) Qual a matriz transposta da matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem 2 com $a_{ij}=i^3+2$?

8.) Determine x e y para que as matrizes A e B sejam iguais:

a) $A = \begin{bmatrix} x^2 & x \\ y & y^2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} x^2 \\ x - 1 \\ x + 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Obs: chama-se <u>matriz</u> <u>simétrica</u> toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que A^t = A.

9.) Determine x, y, z para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & 7 & -4 \\ y & z & -3 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

10.) Dadas A= $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, calcule A + B e A - B.

11.) Dadas A= $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ e C= $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$. Calcule:

a) A + B + C

b) A – B + C

c) A – B – C

d) –A + B – C

12.) Seja C= $(c_{ij})_{2x3}$ a soma das matrizes A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$. Calcule a soma c_{21} + c_{22} + c_{23}.

13.) Sendo A= $(a_{ij})_{1x3}$ tal que a_{ij} = 2i - j e B= $(b_{ij})_{1x3}$ tal que b_{ij}= -i + j + 1, calcule A + B.

14.) Dadas as matrizes:

A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; B= $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$; C= $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ determine a matriz X tal que X + A = B - C.

15.) Calcule as matrizes 2A; $\frac{1}{3}$B e $\frac{1}{2}$(A+B) sendo dadas: A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$.

16.) São dadas as matrizes:

A= $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 12 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ e C= $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcule:

a) 2 A – B + 3C

b) $\frac{1}{2}$ A – ($\frac{1}{3}$B + C)

c) 3B – 4C + 2A

17.) Determine, em cada caso, a matriz X:

a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 7 & 2 \end{bmatrix}^t$

b) $X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^t$

c) $2X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^t$

d) $3X^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

18.) Responda:

a) Se A é do tipo 3x2 e B é do tipo 2x2 então AB é do tipo _______.

b) Se A é do tipo 5x3 e B é do tipo 3x1 então AB é do tipo _______.

c) Se A é do tipo 3x4 e B é do tipo 2x5 então AB _______.

19.) Se A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule AB e BA. Agora responda: AB=BA?

20.) Se A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e B= $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Calcule AB e BA. Agora responda: AB=BA?

Obs: se ocorrer AB=BA, dizemos que as matrizes A e B comutam.

21.) Calcule AB onde A= $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e B= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

22.) Calcule: a) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

23.) Sabendo que M= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e N= $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule MN - NM.

24.) Sendo A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ determine $A^t.B$.

25.) Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determine:

a) $(A \cdot B)^t$

b) $A \cdot B^t$

c) $A^t \cdot B$

26.) Sendo A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^2 = (A.A) , A^3= (A^2.A), A^4=(A^3.A). Tente perceber como se comportam as matrizes produtos e deduza a matriz A^n (n≥1).

27.) Se A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, determine $A^2 + 2A - 11.I_2$ (onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2).

28.) Determine a matriz inversa de cada matriz:

a) A= $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) B= $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

29.) Qual é a matriz inversa da matriz A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$?

30.) Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

a) A= $[5]$

b) B= $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

c) C= $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Obs: se os elementos de uma linha ou coluna qualquer de uma matriz A de ordem n forem todos nulos, então detA=0.

Respostas

1.) a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

2.) a) Diagonal principal: 2; 4; 6.

Diagonal secundária: 0; 4; 8.

b) Diagonal principal: 3; 16; 39.

Diagonal secundária: -1; 16; 43.

3.) 8

4.) 0

5.) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6.) $\left(A^t\right)^t = A$

7.) $A^t = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$

8.) a) x = 1 e y = -2

b) não existe igualdade.

9.) x = 2; y = 5; z = -4

10.) $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

11.) a) $A+B+C=\begin{bmatrix} 3 & 8 & 8 \\ 12 & 23 & 30 \end{bmatrix}$

b) $A-B+C=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ -4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

c) $A-B-C=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -6 & -5 & -8 \end{bmatrix}$

d) $-A+B-C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

12.) 42

13.) [2 2 2]

14.) $X=\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

15.) $2A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{3}B=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{2}(A+B)=\begin{bmatrix} 1/2 & 7/2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

16.) a) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -9 & 30 & 23 \\ 44 & -10 & 8 \end{bmatrix}$

17.) a) $X=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

b) $X=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

c) $X=\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 2 \end{bmatrix}$

d) $X = \begin{bmatrix} 0 & -5/3 \\ -1 & 5/3 \end{bmatrix}$

18.) a) 3x2 b) 5x1 c) não existe

19.) $AB = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

20.) $AB = BA = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}$

21.) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

22.) a) $\begin{bmatrix} 21 \\ -11 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

23.) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

24.) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

25.) a) não existe

b) não existe

c) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

26.) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

27.) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

28.) a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

29.) A não é inversível

30.) $a)\ 5$ $b)\ \frac{5}{2}$ $c)\ 26$

DETERMINANTES

Como as matrizes tratadas neste estudo são quadradas, faz-se necessário identificar tais matrizes. Uma matriz quadrada A de ordem n será denotada por A=[a_{ij}] onde os índices i=1,2,...,n indicam as linhas e os índices j=1,2,...,n indicam as colunas da matriz. O elemento da linha i e da coluna j da matriz A será indicado por a_{ij}.

O determinante de ordem 1 é indicado pelo próprio numero.

Exemplo:

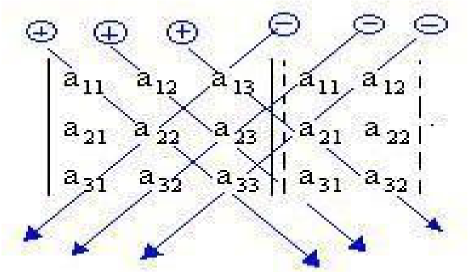
Se A = 2, então o det. $|2| = 2$.

O determinante de ordem e é indicado pela igualdade da diferença entre o produto da diagonal

Exemplo:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = (2 \text{ x } 7) \text{ e } (2 \text{ x } 3) = 14 - 6 = 8$$

O determinante de ordem 3 é definido por:



$$= -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) +$$
$$+ (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

Exemplos :

A = $\|-3\|$, portanto det (A) = $|-3|$ não é módulo de - 3.

B = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, portanto det. (B) = $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & 7 \\ -6 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \text{ portanto det. (C)} = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & 7 \\ -6 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

CÁLCULO DO DETERMINANTE

1) Primeira ordem $\rightarrow$ n = 1

$A_1 = \|\mathbf{a_{11}}\| \;\therefore\;$ det. $(A_1) = |\mathbf{a_{11}}| = a_{11}.$

Exemplos:

$A = \|8\| \;\therefore\;$ det. (A) $= |\mathbf{8}| = 8$ (Não é módulo de 8)

$B = \|-\mathbf{5}\| \;\therefore\;$ det. (B) $= |-\mathbf{5}| = -5$ (Não é módulo de -5)

2) Segunda ordem $\rightarrow$ n = 2

$$A_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \det(A_2) = (a_{11}.\ a_{22}) - (a_{12}.\ a_{21}).$$

Inverter **Manter**

Exemplo :

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \;\therefore\; \det(C) = = (-1.\ 4) - [\,2.\ (-3)\,] = -4 + 6 \Rightarrow \det(C) = 2$$

3) Terceira ordem $\rightarrow$ n = 3 (Regra de Sarrus)

$$A_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \det(A_3) = \left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} & \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} \end{array}\right.$$

Inverter **Manter**

A partir deste ponto, o processo é análogo ao da resolução do determinante de segunda ordem.

Exemplo :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore \ \det(D) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right. = \quad 8 - 27 + 0 - 60 - 0 - 12 \Rightarrow$$

Inverter **Manter**

$\Rightarrow$ det (D) = - 91

3) Ordem maior ou igual a quatro $\rightarrow$ n $\geq$ 4 (Regra, ou teorema de Laplace)

Podemos aplicar a regra (ou teorema) de Lalace para o cálculo de determinantes de ordem n $\geq$ 2, porém, na prática, a utilizaremos quando o determinante for de ordem n $\geq$ 4.
Vamos aqui, tomar um exemplo numérico e a,partir dele extrair os elementos necessários para o cálculo de um determinante de ordem 4, tal procedimento será estendido para qualquer determinante em que se possa aplicar "Laplace".

Exemplo :

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

<u>Resolução</u>: Usando "Laplace", primeiramente vamos escolher uma fila (Linha ou coluna) do determinante, como sendo a base para nossos cálculos. Esta escolha é arbitrária, porém mais adiante daremos uma sugestão, para facilitarmos os cálculos.

Escolhendo, por exemplo, a segunda linha temos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{4.A_{21} + 2.A_{22} + 1.A_{23} + 3.A_{24}}$$

Onde A_{21}, A_{22}, A_{23} e A_{21} são chamados de cofatores dos respectivos elementos. Genericamente podemos indicar como cofator de a_{ij} como sendo:

$$\boxed{\mathbf{A_{ij} = (-1)^{i+j}.\ D_{ij}}}$$

onde D_{ij} é o determinante que se obtém ao eliminarmos a linha i e a coluna j referente ao elemento do qual estamos calculando o cofator.

No nosso caso, os elemento envolvidos, referentes à segunda linha, são a_{21}, a_{22}, a_{23} e a_{24}, então temos :

- $A_{21} = (-1)^{2+1}.\ D_{21} = (-1)^3 . \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-16) \Rightarrow A_{21} = 16$

- $A_{22} = (-1)^{2+2}.\ D_{21} = (-1)^4 . \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 16 \Rightarrow A_{22} = 16$

- $A_{23} = (-1)^{2+3}.\ D_{23} = (-1)^5 . \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-32) \Rightarrow A_{23} = 32$

- $A_{24} = (-1)^{2+4}.\ D_{24} = (-1)^6 . \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -32 \Rightarrow A_{24} = -32$

Voltando ao determinante principal...

det. (A) = $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{4.A_{21} + 2.A_{22} + 1.A_{23} + 3.A_{24}}$

Substituindo os cofatores, temos :

det. (A) = $4.(16) + 2.(16) + 1.(32) + 3.(-32)$

Det. (A) = 64 + 32 + 32 – 96

Finalmente... **det (A)** = 32

Exercícios

1) Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

a) A= $[5]$

b) B= $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

c) C= $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

d) D= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) E= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

f) F= $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

2) Seja A= (a_{ij}) uma matriz quadrada de 2ª ordem, tal que $a_{ij}= i^2 + i \cdot j$. Calcule det A.

3) Sendo A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e B= $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcule det(A), det(B) e o det(AB). Responda: det(AB) = det(A) . det(B)?

4) Dadas A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $[\det(A)]^2$ - 2 det (B).

5) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=0$

b) $\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ x-1 & 5 \end{vmatrix}=0$

c) $\begin{vmatrix} 2x & x-2 \\ 4x+5 & 3x-1 \end{vmatrix}=11$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & x \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$

e) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & -x & 1 \end{vmatrix}=0$

f) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ -2 & x & -4 \\ 1 & -3 & -x \end{vmatrix}=0$

6) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

7) Resolva $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$

8) Calcule cada um dos determinantes a seguir, utilizando a regra de Sarrus.

$a)\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$b)\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

9) Na equação a seguir, envolvendo determinantes, encontre os valores reais de x.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & 1 \\ 1 & 3x & 0 \\ -2 & x & 2 \end{bmatrix} = 14$$

10) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, e sendo N = 50 + det. (A.B), encontre o valor de N.

11) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, calcular o determinante da matriz A . B

12) Se A = (aij) é matriz quadrada de ordem 3 tal que aij = i - j então podemos afirmar que o determinante da matriz 5 A é igual a:

a) 12 b) 56 c) 0 d) 32 e) 2

13) Determine a soma dos elementos da diagonal principal da matriz A = (aij $)_{3 \times 3}$, onde aij = i + j se i $\geq$ j ou aij = i - j se i < j. Qual o determinante de A?

14) Seja A= (a_{ij}) uma matriz quadrada de 2ª ordem, tal que $a_{ij}= i^2 + i \cdot j$. Calcule det A.

15) Sendo A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e B= $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcule det(A), det(B) e o det(AB). Responda: det (AB) = det(A) . det (B)?

16) Dadas A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $[\det(A)]^2$ -2 det (B).

17) Resolva as equações:

b) $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=0$

d) $\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ x-1 & 5 \end{vmatrix}=0$

e) $\begin{vmatrix} 2x & x-2 \\ 4x+5 & 3x-1 \end{vmatrix}=11$

g) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & x \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$

h) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & -x & 1 \end{vmatrix}=0$

i) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ -2 & x & -4 \\ 1 & -3 & -x \end{vmatrix}=0$

18) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

11) Resolva $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$

19) Sejam as Matrizes:

A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & -1 \end{pmatrix}$ e C = $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Encontre o determinante da equação det A – det 6B – det 2C

20) Calcular os determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

21) Calcular os determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 11 \\ -2 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & a & c \\ -c & 0 & b \\ a & b & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ m & n & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

22) Calcular o valor de x.

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & 2x & 1 \\ 3 & x+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & -x & 1 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ -2 & x & -4 \\ 1 & -3 & -x \end{vmatrix} = 0$

23) Calcule o valor de x

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ 3x & x+1 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x & 2x \\ 4 & -x \end{vmatrix}$$

24) Encontre o determinante de cada matriz.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

25) Determine o conjunto verdade da equação. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & x & -1 \\ x & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 6$

26) Sabendo que $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 11 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -1470$, calcule os determinantes das seguintes matrizes.

27) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ x & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x+3 & 2x-1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12$

28) (ITA-2006) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$.

Determine o elemento c_{34} da matriz $C = (A + B)$.

29) (UEL-PR) Uma matriz quadrada A é simétrica se A = A^T. Assim se a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2y \\ x & 0 & z-1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ é simétrica, calcule x + y + z.

RESPOSTAS DOS EXERCICIOS

1) a) 5 b) $\frac{5}{2}$ c) 26 d) 1 e) -9 f) 0

2) -2

3) det(A) = 2; det(B) = -6; det(AB) = -12

4) 36

5) a) 5

b) $-\frac{17}{3}$

c) $-1; \frac{1}{2}$

d) 1

e) 0; 1

f) 0; -2

6) a) -180

b) -8

c) 4

7) x = 2

20)

a) 1

b) - 9

c) -40

21)

a) 121

b) $b(a^2 - c^2)$

c) 4m + 8n -26

22)

a) x = $\frac{1}{2}$

b) x = 0 ou x = -2

c) x = $\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$

24) Encontre o determinante de cada matriz.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Solução.

Aplicando Laplace é interessante escolher a linha ou coluna que possui mais zeros. Assim elimina-se alguns cofatores.

a) A 1ª coluna ou a 4ª linha apresentam dois elementos nulos. Escolhendo a 1ª coluna, vem:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2).\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (1).\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (2)\left((5).\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (3).\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) + (1)\left((2)\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-5).\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (2)[(5)(-2) + (-3)(16)] + (1)[(2)(16) + (-5)(7)] = (2)[-10 - 48] + (1)[32 - 35] = -116 - 3 = -119$$

OBS: Repare que no determinante 3 x 3 foram escolhidos nas 2ª colunas os elementos a_{13} e a_{23}.

b) A 3ª linha possui somente um elemento não nulo.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-3).\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-3).\left((-2).\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (4).\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (-3)[(-2).(0) + (4).(-6)] = (-3).[-24] = 72$$

OBS: Repare que no determinante 3 x 3 foram escolhidos na 2ª coluna os elementos a_{12} e a_{22}.

c) O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal. Como um desses elementos é zero, o determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} 8 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (8).(2).(0).(1) = 0$$

25) Determine o conjunto verdade das equações.

Solução.

a) Aplicando Laplace na linha 1, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & x & -1 \\ x & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow (2).\left((x).\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} - (x).\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \right) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2).[(x).(20) + (-x).(14) + (-1).(-2)] = 6 \Rightarrow (2).[20x - 14x + 2] = 6 \Rightarrow 6x + 2 = 3 \Rightarrow x = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

b) Aplicando Laplace na coluna 1, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -x \\ 3 & 1 & x & -2 \\ 4 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = -39 \Rightarrow (-1).\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -x \\ 4 & 1 & x \end{vmatrix} = -39 \Rightarrow (-1).\left((1).\begin{vmatrix} 0 & -x \\ 1 & x \end{vmatrix} - (2).\begin{vmatrix} 2 & -x \\ 4 & x \end{vmatrix} \right) = -39$$

$$\Rightarrow (-1).[(1).(x) + (-2).(6x)] = -39 \Rightarrow x - 12x = 39 \Rightarrow -11x = 39 \Rightarrow x = -\frac{39}{11}$$

26) Sabendo que $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 11 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -1470$, calcule os determinantes das seguintes matrizes.

Solução.

Observando que os elementos se assemelham à matriz original, é possível aplicar as propriedades dos determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 5 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 1470$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 11 \\ 7 & 6 & 14 & 2 \\ 2 & -5 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & 14 & -4 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 & 11 \\ 7 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 8 \\ 7 & 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -2940$

27) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ x & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x+3 & 2x-1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12$

Solução.

O procedimento será encontrar determinantes por qualquer método e igualar ao valor do 2º membro. Nos casos acima de 2 x 2, será utilizado o método de Laplace.

a) Laplace na 1ª linha

b) Det 2 x 2 natural.

c) Laplace na 1ª linha.

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ x & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (x).\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} - (1).\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = (2).(0) - (x).(x^2) \Rightarrow$$

a) $\Rightarrow (x).\big((x).(-x) + (-1).(x)\big) + (-1).\big((1).(x^2) + (1).(x)\big) = -x^3 \Rightarrow (x).[-x^2 - x] + (-1).[x^2 + x] = -x^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x^3 - x^2 - x^2 - x = -x^3 \Rightarrow -2x^2 - x = 0 \Rightarrow -x(-2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

b) $\begin{vmatrix} x+3 & 2x-1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x+3)-3(2x-1)=0 \Rightarrow 2x+6-6x+3=0 \Rightarrow -4x=-9 \Rightarrow x=\dfrac{9}{4}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \Rightarrow (2).(3)-(x)(-1)+(x).(-5)=12 \Rightarrow 6+x-5x=12 \Rightarrow -4x=6 \Rightarrow x=-\dfrac{6}{4} \equiv -\dfrac{3}{2}$

28) (ITA-2006) Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$.

Determine o elemento c_{34} da matriz $C=(A+B)$.

Solução.

Repare que não é preciso resolver toda a soma dos elementos. A informação que interessa é somente o elemento c_{34}. Como a soma relaciona elemento a elemento correspondente a sua posição, temos que: $c_{34} = a_{34} + b_{34} = 1 + 1 = 2$.

27) (UEL-PR) Uma matriz quadrada A é simétrica se $A = A^T$. Assim se a matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2y \\ x & 0 & z-1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ é simétrica, calcule x + y + z.

Solução. A matriz $A^T=\begin{pmatrix} 2 & x & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2y & z-1 & 2 \end{pmatrix}$ é a simétrica. Igualando as matrizes A e A^T, temos:

$$A=A^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2y \\ x & 0 & z-1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2y & z-1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1 = x \Rightarrow x=-1 \\ 2y=4 \Rightarrow y=2 \\ z-1=3 \Rightarrow z=4 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=-1+2+4=7$$

SISTEMAS LINEARES

Um **sistema linear** é formado por um conjunto de **m** equações lineares, equações estas que se caracterizam por apresentarem todas as incógnitas com potência de grau um.

Exemplos :

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$ **b**) $\begin{cases} -6x + 2y = 0 \\ 2x + 11y = 0 \end{cases}$

c) $\{x - y + 2z + 3w = 9$ **d**) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 5x + 11y = 1 \end{cases}$

MATRIZES ASSOCIADAS

No sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = -2 \end{cases}$ temos...

$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ **Matriz incompleta**

$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ **Matriz completa**

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE UM SISTEMA LINEAR

O sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ pode ser escrito na **forma matricial**: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, onde:

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ É a **matriz incompleta (**ou dos coeficientes**).**

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ É a **matriz das incógnitas**.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ É a **matriz dos termos independentes**.

SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

A **solução de um sistema linear** é a seqüência ordenada (**n-upla**) que é solução de cada uma das equações do sistema.

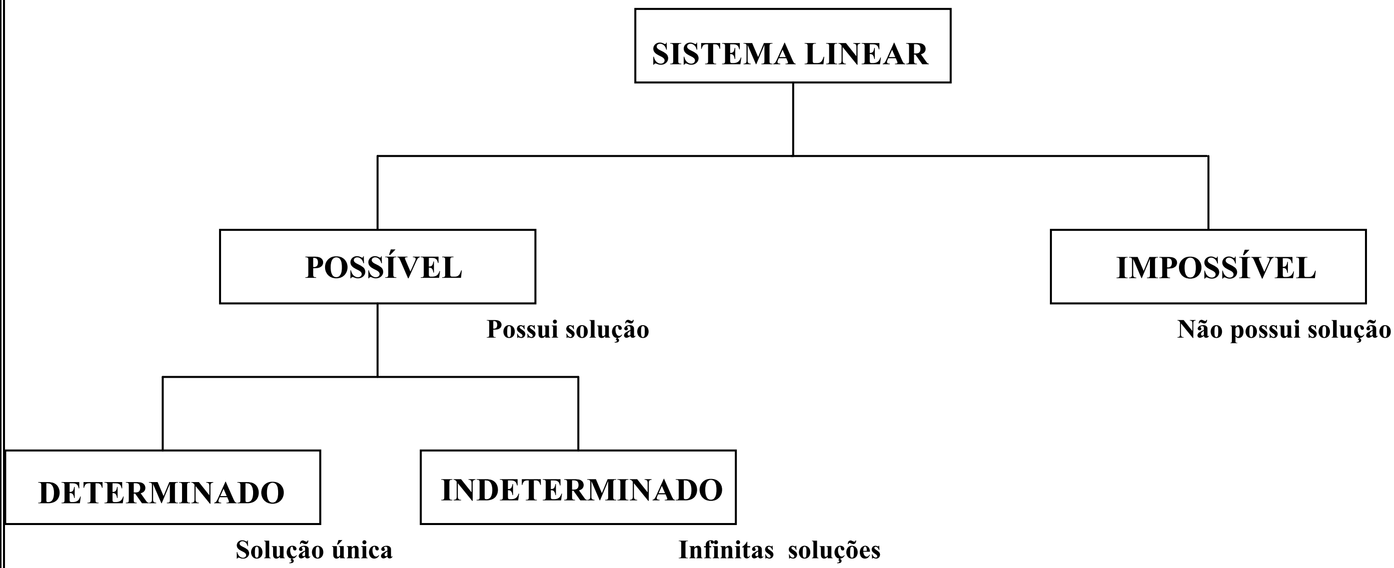
Exemplos:

No sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$, temos o **par ordenado** (2, 1) como solução do sistema, pois ele é solução das **duas** equações do sistema.

No sistema $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$, temos a **terna ordenada** (0, 2, 4) como solução do sistema, pois ele é solução das **duas** equações do sistema.

CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Um **sistema linear** é classificado de acordo com seu número de soluções...



Exemplos :

O sistema $\begin{cases} -x + y = 5 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$ é **S.P.D**, pois o par ordenado **(1, 6)** é sua **ÚNICA** solução.

O sistema $\begin{cases} 5x - 5y + 5z = 10 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ é **S.P.I**, pois apresenta **INFINITAS** soluções**,** entre elas, podemos citar : **(1, 1, 2)**; **(0, 2, 4)**; **(1, 0, 1)**.

O sistema $\begin{cases} x - y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$ é **S.I**, pois **NÃO** apresenta solução.

<u>**EXERCÍCIOS**</u>:

1) Verifique se (2, -1) é solução do sistema linear $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

2) Idem para (1, 1, 1) no sistema $\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - z = 1 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} - 3z = -2 \end{cases}$.

3) Idem para (0, -2, 5) no sistema $\begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ x + y + z = 4 \\ y - z = 7 \end{cases}$.

4) Considere o sistema {x - y = 1.

a) Apresente algumas soluções do sistema.

b) Classifique o sistema.

5) Construa a **matriz incompleta** e a **matriz completa** de :

a) $\begin{cases} \sqrt{3}\,x_1 + 4x_2 = 2 \\ -\dfrac{x_1}{3} + x_2 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - y = 1 \\ 4x + y = 6 \end{cases}$

6) Escreva o **sistema associado** às equações matriciais :

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

REGRA DE CRAMER

Existem alguns métodos para classificarmos e/ou resolvermos um sistema linear. Vamos recordar a **Regra (**ou método**)** de **Cramer**. Tal regra consiste em separar o sistema em matrizes e calcular seus determinantes. Então, a partir de divisões entre estes determinantes, encontramos a solução do sistema.

Vamos a um exemplo prático...

Resolva o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ -x - 2y - 3z = -3 \\ 4x - y - z = 4 \end{cases}$, usando "**Cramer**".

Resolução:

Calculando o **determinante principal** "**D**" ...

D = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ **D** = -36 $\neq 0$, portanto **S.P.D**.

Calculando os **determinantes das incógnitas** ...

D_x = $\begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ **D_x** = -36.

D_y = $\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ **D_y** = 72.

D_z = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow$ **D_z** = -72.

Logo **x =** $\frac{D_x}{D} = \frac{-36}{-36} \Rightarrow$ **x** = 1

y = $\frac{D_y}{D} = \frac{72}{-36} \Rightarrow$ **y** = -2

z = $\frac{D_z}{D} = \frac{-72}{-36} \Rightarrow$ **z** = 2

Portando... S = {(1, -2, 2 **) }**

<u>Exercícios</u>:

1) Resolva os sistemas lineares, usando "**Cramer**" :

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 3 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y + z = 3 \\ -x + 2z = 1 \end{cases}$

S = **{ (** 4, 2 **) }**

S = **{ (** 1, 3, 2 **) }**

S = **{ (** 3, 1, 2 **) }**

DISCUTINDO UM SISTEMA LINEAR

Por **Cramer**, quando $\begin{cases} \mathbf{D \neq 0 \rightarrow S.P.D} \\ \mathbf{D = 0 \rightarrow} \begin{cases} \mathbf{S.P.I} \\ \mathbf{ou} \\ \mathbf{S.I} \end{cases} \end{cases}$.

Na primeira parte do nosso curso, não vamos estudar os modos de determinar se um sistema é **S.P.I** ou **S.I**, logo, ao classificarmos um sistema linear com **D = 0**, basta deixar indicado com "**S.P.I** ou **S.I".**

Exemplos:

1) discuta o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$ em função de "**m**" :

<u>Resolução</u>:

D = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} \rightarrow$ **D** = **m** – 2.

Logo... **S.P.D** $\rightarrow$ **D** $\neq$ **0** $\Rightarrow$ **m** – 2 $\neq$ 0 $\Rightarrow$ **m** $\neq$ 2.

$\left.\begin{matrix} \textbf{S.P.I} \\ \textbf{OU} \\ \textbf{S.I} \end{matrix}\right\} \rightarrow$ **D = 0** $\Rightarrow$ **m** – 2 **=** 0 $\Rightarrow$ **m =** 2.

2) Idem para $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ mx + y + 5z = 9 \end{cases}$

1) Considere o sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + z = 5 \\ -x + y + z = -2 \end{cases}$. Verifique se a) (2 , -1 , 1) e se b) (0 , 0 , 0) são soluções.

2) Verifique quais das quádruplas são soluções do sistema $\begin{cases} 2x - y + z + 2t = 1 \\ 3x + 2y - 5z - 4t = 5 \end{cases}$:

a) (1 , 5 , 0 , 2)

b) (-1 , 3 , -2 , 8)

c) $\left(\dfrac{1}{2}, 7, -1, 4\right)$

d) (a , -2a , 2a -1 , 1 - 3a)

3) Calcule o valor de **m** para que (3 , -2 , 2m) seja solução do sistema:

$$\begin{cases} x - y - 2z = 9 \\ x + 2y + z = -3 \\ 3x - 2y + 5z = 3 \end{cases}$$

4) Calcule o valor de **k** para que (k + 1 , k - 1 , 2) seja solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = -8 \\ x + 5y + z = 4 \end{cases}$$

5) Calcule o valor de **k** para que o sistema $\begin{cases} 3x + y = k^2 - 9 \\ x - 2y = k + 3 \end{cases}$ seja homogêneo.

6) Expresse matricialmente os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2a + b + c = -1 \\ a + c = 0 \\ -3a + 5b - c = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + y + z - t = 2 \\ 2x - y + t = 0 \\ y - z + 3t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = -5 \end{cases}$

7) A expressão matricial de um sistema é:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Determine as suas equações.

8) Resolver os sistemas usando a Regra de *Cramer*:

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -x + 4y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - z = 5 \\ y - z = 3 \end{cases}$

9) Classifique e resolva os sistemas escalonados abaixo:

a) $\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ 2y + z = 2 \\ 5z = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 2 \\ -y + 3z = -3 \\ 7z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5z = 23 \\ 6z = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ y - z = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - 3y + z - t = 4 \\ y - z + 2t = 3 \\ 3z + t = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ -y + 3z - 2t = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 4y - z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$

10) Resolva os sistemas usando o método do escalonamento:

a) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ x + 5y = -9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 5y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = -3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + 4y + 3z = 9 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 8x + 5y - 3z = 0 \\ 7x - 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$

<u>Respostas dos exercicios</u>

1) a) sim b) não

2) a) sim c) não
b) não d) não

3) m = -1

4) não existe k que resolva o sistema

5) k = -3

6) a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

7) $\begin{cases} 2a - 5b = -4 \\ 3a + b = 7 \end{cases}$

8) a) S = {(1 , 2)}

b) $S = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$

c) S = {(1 , 2 , 3)}

d) S = {(6 , 4 , 1)}

9) a) SPD S = {(-3 , 0 , 2)}

b) SPD $S = \left\{\left(\frac{8}{3}, 3, 0\right)\right\}$

c) SPD S = {(1 , 2 , 3)}

d) SPI S = {(6 , 2 + α , α); α ∈ IR}

e) SPI $S = \left\{\left(\frac{43-17\alpha}{6}, \frac{11-7\alpha}{3}, \frac{2-\alpha}{3}, \alpha\right); \alpha \in IR\right\}$

f) SPI S = {(5 - 5α + 3β , -2 + 3α - 2β , α , β); α, β ∈ IR}

g) SPI S = {(-10 + 5α , 3 – α , α) α ∈ IR}

10) a) S = {(1 , -2)}

b) S = {(68 , -25)}

c) $S = \left\{\left(\frac{14}{19}, \frac{16}{19}\right)\right\}$

d) S = {(0 , 1)}

e) S = {(1 , -5 , 2)}

f) S = {(1 , 3 , -2)}

g) $S = \{ \ \ \}$

h) $S = \{(0 , 0 , 0)$

LISTA GERAL DE MATRIZES – OPERAÇÕES E DETERMINANTES

1) Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{2x2}$ tal que $a_{ij} = i^j$ e $B = [b_{ij}]_{2x2}$ tal que $b_{ij} = j^i$, determine:

a) $a_{11} + b_{11}$ b) $a_{22}.(b_{11} + b_{22})$ c) $a_{21}.b_{21}$

2) (FGV-2005) As meninas 1 = Adriana; 2 = Bruna e 3 = Carla falam muito ao telefone entre si. A matriz M mostra cada elemento a_{ij} representando o número de telefonemas que "i" deu para "j" no mês de setembro: $M = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 10 \\ 18 & 0 & 6 \\ 9 & 12 & 0 \end{vmatrix}$. Quem mais telefonou e quem mais recebeu ligações?

3) Uma matriz A é do tipo 3 x 5, outra matriz B é do tipo 5 x 2 e a matriz C é do tipo m x 4. Qual o valor de **m** para que exista o produto (A.B)**.**C?

4) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$ obtenha **X** tal que **X**.A = B.

5) Determine **x** e **y** na igualdade $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 8 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$

6) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, determine A + 2.B^T.

7) Encontre a solução da equação $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & n-1 \\ n & 0 & n \end{vmatrix} = 12.$

8) Encontre a solução da equação $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & n-1 \\ n & 0 & n \end{vmatrix} = 12.$

9) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ calcule AB.

10) Sendo $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine a matriz inversa da matriz A.

11) (AFA 2003) Sejam **m** e **n** números reais tais que **m ≠ n** e as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Qual a relação necessária entre **m** e **n** para que a matriz $C = mA + nB$ **não** seja invisível.

Obs. Para que a matriz C não seja imersível, seu determinante deve ser nulo.

12 – Encontre o valor de **x** na matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ sabendo que **det A^{-1} =** $-\dfrac{1}{10}$.

13) Seja **A^{-1}** a inversa de $A = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Determine **A + A^{-1}**.

14) (UC – GO) Determine **x** a fim de que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ seja igual a sua inversa.

15) Resolva os sistemas,

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 4x - 4y = 6 \end{cases}$

16) Determine o valor de <u>**a**</u> para que o sistema $\begin{cases} ax - y = 8 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ seja possível e determinado (SPD).

17) Determine o valor de <u>**k**</u> de modo que o sistema $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = k \end{cases}$ seja impossível (SI).

18) Discuta os sistemas abaixo em função do parâmetro k.

a) $\begin{cases} kx+2y=3 \\ 4x+6y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y=8 \\ 6x+ky=7 \end{cases}$

19) Resolva os sistemas, se possível, e classifique-os.

a) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x-3y+z=0 \\ 5x-y-z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x+2y-z=4 \\ 5x-4y+3z=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 2x+2y+4z=10 \\ 3x+3y+6z=14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+3z=4 \\ 2x-3y+4z=5 \\ 3x-2y+7z=9 \end{cases}$

20) (ITA – SP) Seja **a** um número real. Considere os sistemas lineares em **x**, **y** e **z**. Calcule o valor de **a** para que o sistema $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-3y+z=1 \\ -2y+z=a \end{cases}$ admita infinitas soluções.

21) Numa loja, os artigos A e B, juntos custam R$70,00. Dois artigos A mais um C custam R$105,00 e a diferença de preços entre os artigos B e C, nessa ordem, é R$ 5,00. Qual o preço do artigo C?

22) (UERJ) Um feirante separou um número inteiro de dúzias de tangerinas (t), de maçãs (m) e de pêras (p). Observou que para cada maçã arrumada, havia 2 tangerinas. Com 90 dúzias, ele fez lotes de 6 tangerinas, lotes com 6 maçãs e lotes com 4 pêras. Colocou em cada lote, indistintamente, o preço de R$0,50. Arrecadou R$105,00 na venda de todos eles. Calcule **t**, **m**, e **p**.

23) Misturam-se dois tipos de leite, um com 3% de gordura outro com 4% de gordura para obter, ao todo, 80 litros de leite com 3,25% de gordura. Quantos litros de leite de cada tipo foram misturados?

24) Determine, se existir, a inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

25) Determine a matriz X tal que X – A + B = 0, sendo dados $A=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

26) Calcule det A, sendo:

a) A = (a_{ij}) uma matriz quadrada de 2ª ordem, com $a_{ij} = i^2 + ij$.

b) A, a matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema $\begin{cases} 7x - 3y = 10 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$ na posição em que

27) Sabendo que $a = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, $b = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ e $c = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$, calcule o número real x tal que x = 3a - 2b + c^2.

28) Aplicando a regra de Sarrus, calcule os determinantes:

a) $a = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}$.

b) $b = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

29) Resolva a equação $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & x & -3 \end{vmatrix} = 2.$

30) Seja a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} x+1 & 3 & x \\ 3 & x & 1 \\ x & 2 & x-1 \end{bmatrix}$. Calcule x de modo que det A = 0.

31) Classifique e resolva o sistema $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$.

32) Classifique e resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$.

33) Classifique e resolva o sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$.

34) Discuta o sistema linear $\begin{cases} mx + y = -2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

35) Calcule os valores de <u>a</u> para que o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ ax - 6y = 0 \end{cases}$ seja possível e determinado.

36) Calcule os valores de <u>m</u> para que o sistema $\begin{cases} (m+2)x + (m+5)y = 7 \\ 2x + (m+3)y = 0 \end{cases}$ seja possível e determinado.

37) (UF - SC) Sejam $A=(a_{ij})_{4\times 3}$ e $B=(b_{ij})_{3\times 4}$ duas matrizes definidas por $a_{ij}=i+j$ e $b_{ij}=2i+j$, respectivamente. Se $A\cdot B=C$, então qual é o elemento c_{32} da matriz C ?

38) Resolva o sistema $\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -9 & 19 \end{pmatrix} \\ X-4Y=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -18 \end{pmatrix} \end{cases}$

39) Considere $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Determine $\left(A^{-1}\right)^2+A^t$.

40) Escreva a matriz A = (a_{ij}) do tipo 3x4 sabendo que a_{ij} = 2i – 3j.

LISTA GERAL DE MATRIZES – OPERAÇÕES E DETERMINANTES - GABARITO

1) Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{2x2}$ tal que $a_{ij} = i^j$ e $B = [b_{ij}]_{2x2}$ tal que $b_{ij} = j^i$, determine:

a) $a_{11} + b_{11}$ b) $a_{22}.(b_{11} + b_{22})$ c) $a_{21}.b_{21}$

Solução. Não é necessário construir todas as matrizes. Basta identificar os elementos indicados.

a) $\begin{cases} a_{11} = 1^1 = 1 \\ b_{11} = 1^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_{11} + b_{11} = 1 + 1 = 2$

b) $\begin{cases} a_{22} = 2^2 = 4 \\ b_{11} = 1^1 = 1 \\ b_{22} = 2^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow a_{22}.(b_{11} + b_{22}) = 4.(1+4) = 4(5) = 20$

c) $\begin{cases} a_{21} = 2^1 = 2 \\ b_{21} = 1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_{21}.b_{21} = (2).(1) = 2$

2) (FGV-2005) As meninas 1 = Adriana; 2 = Bruna e 3 = Carla falam muito ao telefone entre si. A matriz M mostra cada elemento a_{ij} representando o número de telefonemas que "i" deu para "j" no mês de setembro: $M = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 10 \\ 18 & 0 & 6 \\ 9 & 12 & 0 \end{vmatrix}$. Quem mais telefonou e quem mais recebeu ligações?

Solução.

Observe que a diagonal nula informa que ninguém ligou para si mesmo e, obviamente, não recebeu ligação de si mesmo. Decodificando os valores das posições:

a) Adriana fez 23 ligações: 13 para Bruna e 10 para Carla.

b) Bruna fez 24 ligações: 18 para Adriana e 6 para Carla.

c) Carla fez 21 ligações: 9 para Adriana e 12 para Bruna.

d) Bruna foi quem mais telefonou. E recebeu 13 + 12 = 25 ligações.

e) Adriana foi a 2ª menina que mais ligou. E recebeu 18 + 9 = 27 ligações.

f) Carla foi quem menos ligou. E recebeu 10 + 6 = 16 ligações.

A resposta pedida é: Mais telefonou foi Bruna e recebeu mais ligações foi Adriana.

3) Uma matriz A é do tipo 3 x 5, outra matriz B é do tipo 5 x 2 e a matriz C é do tipo m x 4. Qual o valor de m para que exista o produto (A.B).C?

Solução.

Para que exista o produto (A.B) é necessário que o número de colunas de A seja o mesmo de linhas de B. Isso já acontece e o produto é do tipo 3 x 2. Isto é (A.B) possui 3 linhas e 2 colunas. Para que seja possível o produto por C_{mx4} o número de linhas de C deve ser o mesmo de colunas de (A.B). Logo, m = 2.

4) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}4 & 0\end{bmatrix}$ obtenha X tal que X.A = B.

Solução.

A é do tipo 2 x 2 e B é do tipo 2 x 1. Logo X é do tipo 2 x 1. Seja $X=\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}$. Temos:

$X.A=\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+b & 5a-3b\end{bmatrix}$. Igualando a B, vem:

$\begin{cases}3a+b=4 \to (x3)\\ 5a-3b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}9a+3b=12\\ 5a-3b=0\end{cases} \Rightarrow 14a=12 \Rightarrow a=\frac{12}{14}=\frac{6}{7} \Rightarrow b=\frac{5.\frac{6}{7}}{3}=\frac{10}{7}$. Logo, $\boxed{X=\begin{bmatrix}\frac{6}{7} & \frac{10}{7}\end{bmatrix}}$.

5) Determine x e y na igualdade $\begin{bmatrix}x & 3\\ 4 & y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 8 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 12 & -6\end{bmatrix}$

Solução.

Somando as matrizes e igualando ao resultado, temos:

$$\begin{bmatrix}x & 3\\ 4 & y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 8 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 12 & -6\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x-1 & 8\\ 12 & 2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 12 & -6\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x-1=4 \Rightarrow x=5\\ 2y=-6 \Rightarrow y=-3\end{cases}$$

6) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\\ 4 & -3\end{bmatrix}$, determine A + 2.$B^T$.

Solução.

Exibindo a transposta de B, temos: $B^T=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ -2 & 0 & -3\end{bmatrix}$. Efetuando a expressão, vem:

$$A+2.B^{T}=\begin{bmatrix}1&2&-3\\4&5&6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&3&4\\-2&0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-3\\4&5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&6&8\\-4&0&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&8&5\\0&5&0\end{bmatrix}$$

7) Encontre a solução da equação $\begin{vmatrix}2&1&3\\4&-1&n-1\\n&0&n\end{vmatrix}=12.$

Para achar o determinante de uma matriz 3x3 podemos utilizar a regra de Sarrus, que consiste em copiar as duas primeiras colunas à direita da matriz, e subtrair a soma dos produtos da primeira diagonal, pela soma dos produtos da segunda :

$$\left|\begin{matrix}2&1&3\\4&-1&n-1\\n&0&n\end{matrix}\right|\begin{matrix}2&1\\4&-1\\\text{n}&0\end{matrix}=12\ \Rightarrow\ (-2n+n(n-1)+0)-(-3n+0+4n)=12$$

$$(-2n+n^{2}-n)-n=12\ \Rightarrow\ \text{n}^{2}-4n-12=0$$

$$n=\frac{4\pm\sqrt{16\text{-}4.1.(\text{-}12)}}{2}\ \Rightarrow\ n=\frac{4\pm\sqrt{64}}{2}\ \Rightarrow\ n=\frac{4\pm 8}{2}\ \Rightarrow\begin{cases}n=6\\n=-2\end{cases}$$

8) Encontre a solução da equação $\begin{vmatrix}2&1&3\\4&-1&n-1\\n&0&n\end{vmatrix}=12.$

Para achar o determinante de uma matriz 3x3 podemos utilizar a regra de Sarrus, que consiste em copiar as duas primeiras colunas à direita da matriz, e subtrair a soma dos produtos da primeira diagonal, pela soma dos produtos da segunda :

$$\left|\begin{matrix}2&1&3\\4&-1&n-1\\n&0&n\end{matrix}\right|\begin{matrix}2&1\\4&-1\\\text{n}&0\end{matrix}=12\ \Rightarrow\ (-2n+n(n-1)+0)-(-3n+0+4n)=12$$

$$(-2n+n^{2}-n)-n=12\ \Rightarrow\ \text{n}^{2}-4n-12=0$$

$$n=\frac{4\pm\sqrt{16\text{-}4.1.(\text{-}12)}}{2}\ \Rightarrow\ n=\frac{4\pm\sqrt{64}}{2}\ \Rightarrow\ n=\frac{4\pm 8}{2}\ \Rightarrow\begin{cases}n=6\\n=-2\end{cases}$$

9) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ calcule AB.

Essa é uma questão de multiplicação de matrizes, onde estamos multiplicando uma matriz 3x2 por uma 2x2. O resultado será obtido pelo produto de cada linha da matriz A por cada coluna da matriz B. O resultado será uma matriz 3x2.

$$AB = \begin{bmatrix} 1.5 + 0.1 & 1.(-3) + 0.2 \\ (-2).5 + 3.1 & (-2)(-3) + 3.2 \\ 0.5 + 4.1 & 0(-3) + 4.2 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

10) Sendo $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine a matriz inversa da matriz A.

Sabemos que uma matriz multiplicada pela sua inversa resulta na matriz identidade, ou seja :

$A.A^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 5c = 1 \\ 4b + 5d = 0 \\ 3a + 4c = 0 \\ 3b + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} 4a + 5c = 1 \\ 3a + 4c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} 4b + 5d = 0 \\ 3b + 4d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -5 \\ d = 4 \end{cases} \end{matrix}$$

Portanto, a matriz inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

11) (AFA 2003) Sejam m e n números reais tais que m ≠ n e as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Qual a relação necessária entre m e n para que a matriz $C = mA + nB$ não seja inversível.

Solução.

Multiplicando os escalares "m" e "n" pelas respectivas matrizes, temos:

i) $C = m.A + n.B = m.\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + n.\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m - n & m + n \\ 3m & 5m + n \end{bmatrix}$

Para que a matriz C não seja inversível, seu determinante deve ser nulo.

ii) $\det C = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2m-n & m+n \\ 3m & 5m+n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2m-n).(5m+n)-(3m).(m+n)=0$. Desenvolvendo a expressão e simplificando, temos: $10m^2+2mn-5mn-n^2-3m^2-3mn=0 \Rightarrow 7m^2-6mn-n^2=0$. Resolvendo a equação em relação a "m", vem.

$$m=\frac{-(-6n)\pm\sqrt{(-6n)^2-4(7)(-n^2)}}{2(7)}=\frac{6n\pm\sqrt{36n^2+28n^2}}{14}=\frac{6n\pm\sqrt{64n^2}}{14}\Rightarrow m=\begin{cases}\dfrac{6n+8n}{14}=\dfrac{14n}{14}=n\\[2mm] \dfrac{6n-8n}{14}=\dfrac{-2n}{14}=-\dfrac{n}{7}\end{cases}.$$

Como pelo enunciado m ≠ n, a matriz não será inversível se 7m + n = 0.

12) Encontre o valor de x na matriz $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & x\end{bmatrix}$ sabendo que det A^{-1} = $-\frac{1}{10}$.

Solução.

Como $\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}$ conclui-se que $\boxed{\frac{1}{\det A}=-\frac{1}{10}}$. Logo, detA = - 10. Substituindo esse valor no cálculo do determinante de A, temos: $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & x\end{vmatrix}=-10\Rightarrow x-6=-10\Rightarrow x=-4.$

13) Seja A^{-1} a inversa de $A=\begin{pmatrix}-9 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$. Determine A + A^{-1}.

Solução.

O determinante da matriz é diferente de zero. Logo, possui inversa.

$$\begin{bmatrix}-9 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}-9a+4c=1\\ -a-2c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-9a+4c=1\\ 9a+18c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}22c=1\Rightarrow c=1/22\\ 9a=-18/22\Rightarrow a=-1/11\end{cases}\\ \begin{cases}-9b+4d=0\\ -b-2d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-9b+4d=0\\ 9b+18d=-9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}22d=-9\Rightarrow d=-9/22\\ 9b=-36/22\Rightarrow b=-2/11\end{cases}\end{cases}$$

$$A+A^{-1}=\begin{bmatrix}-9 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1/11 & -2/11\\ 1/22 & -9/22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-100/11 & 42/11\\ -21/22 & -53/22\end{bmatrix}$$

14) (UC – GO) Determine x a fim de que a matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & x\end{pmatrix}$ seja igual a sua inversa.

Solução.

O produto da matriz A por ela mesma deverá resultar na matriz identidade.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & x\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2+2x\\ 0 & x^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2+2x=0\\ x^2=1\Rightarrow x=\pm 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\to 2+2(1)\neq 0\\ x=-1\to 2+2(-1)=0\end{cases}.$$

Logo, o único valor que satisfaz é x = - 1.

15) Resolva os sistemas.

a) $\begin{cases}x+3y=5\\ 3x-2y=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-y=3\\ 4x-4y=6\end{cases}$

Solução.

Os sistemas podem ser resolvidos por qualquer método.

a) $\begin{cases}x+3y=5\to\times(-3)\\ 3x-2y=1\end{cases}\begin{cases}-3x-9y=-15\\ 3x-2y=1\end{cases}\Rightarrow -11y=-14\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{14}{11}\\ x=5-3\left(\dfrac{14}{11}\right)=\dfrac{55-42}{11}=\dfrac{13}{11}\end{cases}$

Logo, $S=\left\{\left(\frac{13}{11},\frac{14}{11}\right)\right\}$. Sistema possível e determinado representado por retas concorrentes.

b) $\begin{cases}x-y=3\to\times(-4)\\ 4x-4y=6\end{cases}\begin{cases}-4x-4y=-12\\ 4x-4y=6\end{cases}\Rightarrow 0=-12\to \text{Im}\,possível\to S=\{\ \}$. Retas paralelas distintas.

16) Determine o valor de a para que o sistema $\begin{cases}ax-y=8\\ 2x+4y=6\end{cases}$ seja possível e determinado (SPD).

Solução.

O determinante da matriz dos coeficientes deverá ser diferente de zero.

$$\begin{cases}ax-y=8\\ 2x+4y=6\end{cases}\to(SPD)\Rightarrow D=\begin{vmatrix}a & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow 4a-(-2)\neq 0\Rightarrow 4a\neq -2\Rightarrow a\neq -1/2.$$

17) Determine o valor de k de modo que o sistema $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=k \end{cases}$ seja impossível (SI). Isto é, para que a representação geométrica da solução sejam retas paralelas distintas.

Solução.

Para que o sistema seja possível e indeterminado (SI), basta que se verifique a proporcionalidade entre os coeficientes de “x” e “y”, mas não em relação aos termos independentes. Isto é:

$$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}\neq\frac{1}{k}\Rightarrow\begin{cases}(1).(8)=(2).(4)\Rightarrow 8=8\rightarrow ok. \\ (2).(k)\neq(1).(8)\Rightarrow 2k\neq 8\Rightarrow k\neq 4\end{cases}.$$

Qualquer valor de “k” que não seja 4, tornará o sistema impossível.

18) Discuta os sistemas abaixo em função do parâmetro k.

a) $\begin{cases} kx+2y=3 \\ 4x+6y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y=8 \\ 6x+ky=7 \end{cases}$

Solução.

No caso geral em sistemas 2 x 2 a análise pode ser feita partindo das situações:

i) $\boxed{\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}\rightarrow SPD}$ ii) $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\rightarrow SPI}$ iii) $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\neq\frac{e}{f}\rightarrow SI}$

a) $\begin{cases} kx+2y=3 \\ 4x+6y=9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{k}{4}\neq\frac{2}{6}\Rightarrow 6k\neq 8\Rightarrow k\neq 8/6\rightarrow(SPD) \\ \frac{k}{4}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}\Rightarrow k=8/6\rightarrow(SPI)\end{cases}$. Não há valor de “k” que o torne impossível.

b) $\begin{cases} 3x+4y=8 \\ 6x+ky=7 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{6}\neq\frac{4}{k}\Rightarrow 3k\neq 24\Rightarrow k\neq 8\rightarrow(SPD) \\ \frac{3}{6}=\frac{4}{k}\neq\frac{8}{7}\Rightarrow k=8\rightarrow(SI)\end{cases}$. Não há valor de “k” que o torne indeterminado.

19) Resolva os sistemas, se possível, e classifique-os.

a) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x-3y+z=0 \\ 5x-y-z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x+2y-z=4 \\ 5x-4y+3z=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 2x+2y+4z=10 \\ 3x+3y+6z=14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+3z=4 \\ 2x-3y+4z=5 \\ 3x-2y+7z=9 \end{cases}$

Solução.

Os sistemas foram escalonados.

a) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x-3y+z=0 \\ 5x-y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2L_1-L_2 \\ 5L_1-L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+2z=4 \\ 5y+3z=8 \\ 6y+11z=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 6L_2-5L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+2z=4 \\ 5y+3z=8 \\ -37z=-37 \end{cases}$. Calculando o valor de <u>z</u>,

temos: $z=\frac{-37}{-37}=1$; $y=\frac{8-3z}{5}=\frac{8-3(1)}{5}=\frac{5}{5}=1$; $\begin{matrix} x=4-y-2z \\ x=4-(1)-2(1)=4-3=1 \end{matrix}$.

Logo a solução é S = { 1, 1, 1}. O sistema é possível e determinado.

b) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x+2y-z=4 \\ 5x-4y+3z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3L_1-L_2 \\ 5L_1-L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=6 \\ y+4z=14 \\ 9y+2z=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 9L_2-L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=6 \\ y+4z=14 \\ 34z=102 \end{cases}$. Calculando o valor de <u>z</u>,

temos: $z=\frac{102}{34}=3$; $\begin{matrix} y=14-4z=14-4(3) \\ y=14-12=2 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x=6-y-z \\ x=6-(2)-(3)=6-5=1 \end{matrix}$.

Logo a solução é S = { 1, 2, 3}. O sistema é possível e determinado.

c) $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 2x+2y+4z=10 \\ 3x+3y+6z=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2L_1-L_2 \\ 3L_1-L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+2z=5 \\ 0+0+0=0 \\ 0+0+0=1 \rightarrow impossível \end{cases}$. Logo o sistema não possui solução.

d) $\begin{cases} x+y+3z=4 \\ 2x-3y+4z=5 \\ 3x-2y+7z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2L_1-L_2 \\ 3L_1-L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+3z=4 \\ 5y+2z=3 \\ 5y+2z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ L_2-L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+3z=4 \\ 5y+2z=3 \\ 0+0=0 \end{cases} \Rightarrow$. Calculando o valor de <u>y</u>,

temos: $y=\frac{3-2z}{5}$; $\begin{matrix} x=4-y-3z \\ x=4-\frac{3-2z}{5}-3z=\frac{20-3+2z}{5}=\frac{17+2z}{5} \end{matrix}$. A variável <u>z</u> é chamada variável livre.

Logo a solução é S = { $\frac{17+2z}{5}$, $\frac{3-2z}{5}$, z }. O sistema é possível e indeterminado.

20) (ITA – SP) Seja a um número real. Considere os sistemas lineares em x, y e z. Calcule o valor de a para que o sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ -2y + z = a \end{cases}$ admita infinitas soluções.

Solução.

Escalonando o sistema: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \Rightarrow L_1 - L_2 \\ -2y + z = a \end{cases} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4y - 2z = -1 \Rightarrow \\ -2y + z = a \quad L_2 + 2L_3 \end{cases} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4y - 2z = -1 \\ 0 = -1 + 2a \end{cases}$.

Para que o sistema seja indeterminado o 2º membro da 3ª equação deve ser nulo. Logo, $\boxed{a = \frac{1}{2}}$.

21) Numa loja, os artigos A e B, juntos custam R$70,00. Dois artigos A mais um C custam R$105,00 e a diferença de preços entre os artigos B e C, nessa ordem, é R$ 5,00. Qual o preço do artigo C?

Solução.

De acordo com as informações do problema, temos o sistema: $\begin{cases} A + B = 70 \\ 2A + C = 105 \\ B - C = 5 \end{cases}$. Escalonando, vem:

$\begin{cases} A + B = 70 \\ 2A + C = 105 \Rightarrow 2L_1 - L_2 \\ B - C = 5 \end{cases} \begin{cases} A + B = 70 \\ 2B - C = 35 \Rightarrow \\ B - C = 5 \quad L_2 - 2L_3 \end{cases} \begin{cases} A + B = 70 \\ 2B - C = 35 \Rightarrow \\ C = 25 \end{cases}$. Substituindo nas equações anteriores, temos: $\boxed{B = \frac{C + 35}{2} = \frac{25 + 35}{2} = 30}$; $\boxed{A = 70 - B = 70 - 30 = 40}$. A resposta pedida é R$25,00.

22) (UERJ) Um feirante separou um número inteiro de dúzias de tangerinas (t), de maçãs (m) e de pêras (p). Observou que para cada maçã arrumada, havia 2 tangerinas. Com 90 dúzias, ele fez lotes de 6 tangerinas, lotes com 6 maçãs e lotes com 4 pêras. Colocou em cada lote, indistintamente, o preço de R$0,50. Arrecadou R$105,00 na venda de todos eles. Calcule t, m, e p.

Solução.

Utilizando os dados do problema e as letras representantes das frutas, montamos o sistema:

$\begin{cases} m = 2t \\ 6t + 6m + 4p = 90(12) \\ 0{,}5t + 0{,}5m + 0{,}5p = 105 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6t + 12t + 4p = 1080 \\ 0{,}5t + t + 0{,}5p = 105 \rightarrow \times(10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18t + 4p = 1080 \rightarrow \div(2) \\ 15t + 5p = 105 \rightarrow \div(5) \end{cases}$. Escalonando o sistema simplificado, vem: $\begin{cases} 9t + 2p = 540 \\ 3t + p = 210 \end{cases} \underset{L_1 - 3L_2}{\Rightarrow} \begin{cases} 9t + 2p = 540 \\ -p = -90 \end{cases}$. Logo, p = 90. Substituindo na 1ª equação, encontra-se $t = \frac{540 - 2p}{9} = \frac{540 - 2(90)}{9} = \frac{360}{9} = 40$ e $\boxed{m = 2t = 2(40) = 80}$.

23) Misturam-se dois tipos de leite, um com 3% de gordura outro com 4% de gordura para obter, ao todo, 80 litros de leite com 3,25% de gordura. Quantos litros de leite de cada tipo foram misturados?

Solução.

Representando a quantidade de litros de leite com 3% de gordura como "x" e com 4% como "y", o resultado final deverá ser (x + y).3,25%. O sistema é: $\boxed{\begin{cases} x + y = 80 \\ 3x + 4y = 3{,}25(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 80 \\ -0{,}25x + 0{,}75y = 0 \end{cases}}$.

Multiplicando por 100 a 2ª equação e escalonando, vem: $\boxed{\begin{cases} x + y = 80 \\ -25x + 75y = 0 \end{cases} \Rightarrow}_{25L_1 + L_2} \boxed{\begin{cases} x + y = 80 \\ 100y = 2000 \end{cases}}$. Calculando "y", temos: $\boxed{y = \frac{2000}{100} = 20}$; $\boxed{x = 80 - 20 = 60}$. Logo serão misturados 60 litros de leite.

24) Determine, se existir, a inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solução.

Para que uma matriz possua inversa, é necessário que seu determinante seja diferente de zero. Calculando: det A = (1.2 – 3.0) = 2 ≠ 0. Logo possui inversa.

Encontrar A^{-1} significa encontrar a solução de: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Desenvolvendo a multiplicação e expressando o sistema, temos:

$\begin{cases} a + 3c = 1 \\ 0a + 2c = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} b + 3d = 0 \\ 0b + 2d = 1 \end{cases}$. Da 2ª equação, temos que: 2c = 0. Logo c = 0. Substituindo na 1ª equação,

temos: a + 0 = 1. Logo a = 1. A 4ª equação fornece 2d = 1. Logo d = 1/2. A 3ª indica que b = -3d, logo b = -3/2.

Logo $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$.

25) Determine a matriz X tal que X – A + B = 0, sendo dados $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Solução.

A equação X – A + B = 0 pode ser reescrita como: X = A – B. O exercício resume-se a encontrar a matriz resultante da subtração elemento a elemento entre A e B.

$$X = A - B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -2-(-2) \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

26) Calcule det A, sendo:

a) A = (a_{ij}) uma matriz quadrada de 2ª ordem, com $a_{ij} = i^2 + ij$.

Solução.

Uma matriz quadrada de 2ª ordem possui 2 linhas e 2 colunas. Primeiro precisamos construir a matriz de acordo com a lei: $a_{ij} = i^2 + ij$.

$a_{11} = (1)^2 + (1).(1) = 2$ $a_{12} = (1)^2 + (1).(2) = 3$ $a_{21} = (2)^2 + (2).(1) = 6$ $a_{22} = (2)^2 + (2).(2) = 8$

Logo a matriz será: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (2.8 - 3.6) = 16 - 18 = -2.$

b) A, a matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema $\begin{cases} 7x - 3y = 10 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$ na posição em que aparecem.

Solução. A matriz dos coeficientes será: $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (7.5) - (-3.2) = 35 + 6 = 41.$

27) Sabendo que $a = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, $b = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ e $c = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$, calcule o número real x tal que

$x = 3a - 2b + c^2$.

Solução.

Repare que os números estão entre barras e não colchetes. Além disso, as letras *a*,*b*, *e* *c* estão em minúsculas. Essa forma de apresentação indica que cada letra vale o determinante dos números. É preciso atenção para não confundir: representação de matriz com representação de determinantes.

Então, temos: a = (3).(-1) – (-2).(1) = - 1; b = (-1).(0) – (3).(2) = - 6; c = (-2).(-7) – (4).(4) = - 2.

Logo $x = 3(-1) – 2(- 6) + (- 2)^2 = - 3 + 12 + 4 = 13$.

28) Aplicando a regra de Sarrus, calcule os determinantes:

Solução.

a) $a = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}$.

$$a = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow a = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right.$$

a = (3*0*1 + 2*4*2 + (-1)*5*-3) - ((-1)*0*2 + 3*4*(-3) + 2*5*1)

a = 31 - (-26) = 57

b) $b = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

$$b = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow b = \left|\begin{array}{ccc|cc} a^2 & ab & b^2 & a^2 & ab \\ 2a & a+b & 2b & 2a & a+b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

$b = [a^2(a + b).1 + (ab).(2b).1 + (b^2).(2a).1] – [(b^2).(a + b).1 + (a^2).(2b).1 + (ab).(2a).1]$

$b = [a^3 + a^2b + 2ab^2 + 2ab^2] – [ab^2 + b^3 + 2a^2b + 2a^2b]$

$b = a^3 + a^2b + 2ab^2 + 2ab^2 – ab^2 - b^3 - 2a^2b - 2a^2b = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a – b)^3$.

29) Resolva a equação $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & x & -3 \end{vmatrix} = 2.$

Solução.

Precisamos encontrar o determinante e igualar a 2. Aplicando Sarrus, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & x & -3 \end{vmatrix} = 2 \qquad \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x & 0 & 1 \\ 2 & x & -3 & 2 & x \end{array}\right. = 2$$

[2.1.(-3) + 3.(x).2 + (- 2).0.(x)] – [(- 2).1.2 + 2.(x).(x) + 3.0.(-3)] = 2

[-6 + 6x + 0] – [- 4 + 2x^2 + 0] = 2 implicando em: 2x^2 + 6x – 2 – 2 = 0.

Simplificando a equação vem: x^2 + 3x - 2 = 0. Fatorando, vem: (x - 1). (x - 2) = 0.

Logo temos dois valores para x. S = {1,2}

30) Seja a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} x+1 & 3 & x \\ 3 & x & 1 \\ x & 2 & x-1 \end{bmatrix}$. Calcule x de modo que det A = 0.

Solução.

Precisamos encontrar o determinante e igualar a 0. Aplicando Sarrus, temos:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & x \\ 3 & x & 1 \\ x & 2 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \left|\begin{array}{ccc|cc} x+1 & 3 & x & x+1 & 3 \\ 3 & x & 1 & 3 & x \\ x & 2 & x-1 & x & 2 \end{array}\right. = 0$$

[(x + 1).(x).(x - 1) + 3.1.(x) + (x).3.2] – [(x).(x).(x) + (x + 1).2.1 + 3.3.(x - 1)] = 0

[x.(x^2 – 1) + 3x + 6x] – [x^3+ 2x + 2 + 9x - 9] = 0. Cancelando x^3 e simplificando temos:

8x – 11x + 7 = 0. Logo 3x = 7 implicando em x = 7/3. S = {7/3}.

31) Classifique e resolva o sistema $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$.

Solução.

Comparando as proporções dos coeficientes, temos: $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{3}$. Logo é possível e possui uma única solução. Outra forma de descobrir isso é utilizar a Regra de Cramer e verificar que det

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (3.(-3)) - (1.2) = -9 - 2 = -11 \neq 0.$ Para encontrar as soluções, encontramos

$A_x = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_x = (10.(-3)) - (1.(-8)) = -30 + 8 = -22 \neq 0.$ E,

$A_y = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_y = (3.(-8)) - (10.2) = -24 - 20 = -44 \neq 0$.

Logo, x = $\frac{-22}{-11} = 2$ e y = $\frac{-44}{-11} = 4$. S = {(2,4)}.

32) Classifique e resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$.

Solução.

Comparando as proporções dos coeficientes, temos: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{10}{5}$. Logo é impossível e não possui solução. Outra forma de descobrir isso é utilizar a Regra de Cramer e verificar que det $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (1.(2)) - (1.2) = 2 - 2 = 0.$ Para encontrar as soluções, encontramos

$A_x = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_x = (10.(2)) - (1.(5)) = 20 - 5 = 15 \neq 0.$ E,

$A_y = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_y = (1.(5)) - (10.2) = 5 - 20 = -15 \neq 0$.

Logo, x = $\frac{15}{0} = impossível$ e y = $\frac{-15}{0} = impossível$. S = { }.

33) Classifique e resolva o sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$.

Solução.

Comparando as proporções dos coeficientes, temos: $\frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{10}{5}$. Logo é possível e possui infinitas soluções. Outra forma de descobrir isso é utilizar a Regra de Cramer e verificar que det $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (1.(2)) - (1.2) = 2 - 2 = 0.$ Para encontrar as soluções, encontramos

$A_x = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_x = (10.(1)) - (2.(5)) = 10 - 10 = 10.$ E,

$A_y = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_y = (2.(5)) - (10.1) = 10 - 10 = 0.$

Logo, x = $\frac{0}{0} = indeterminado$ e y = $\frac{0}{0} = indeterminado$. Significa que escolhendo um valor aleatório para x, podemos determinar y. Exemplos: x = 3, y = 5 – 3 = 2. De forma geral o par ordenado solução pode ser escrito como S = {(k,5-k)}.

34) Discuta o sistema linear $\begin{cases} mx + y = -2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Solução.

Utilizando o procedimento de comparar as razões entre os coeficientes, temos:

Para que o sistema possua solução única, $\frac{m}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow m \neq -1$. O mesmo poderia ser concluído analisando a matriz dos coeficientes $A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (m.(-1)) - (1.1) = -m - 1 \neq 0.$ Logo possui solução única se m ≠ -1. Se m = - 1, o sistema seria impossível porque: $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{1}$.

OBS: Lembre que essa discussão é analítica e que uma representação geométrica implica em retas concorrentes (solução única), coincidentes (indeterminado) ou paralelas (impossível).

35) Calcule os valores de a para que o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ ax - 6y = 0 \end{cases}$ seja possível e determinado.

Solução.

Utilizando a comparação das razões dos coeficientes, temos que o sistema é possível e determinado (solução única), se $\frac{3}{a} \neq \frac{2}{-6} \Rightarrow 2a \neq -18 \Rightarrow a \neq -9.$

36) Calcule os valores de m para que o sistema $\begin{cases} (m+2)x + (m+5)y = 7 \\ 2x + (m+3)y = 0 \end{cases}$ seja possível e determinado.

Solução.

Utilizando a comparação das razões dos coeficientes, temos que o sistema é possível e determinado (solução única), se $\frac{m+2}{2} \neq \frac{m+5}{m+3} \Rightarrow m^2 + 5m + 6 \neq 2m + 10.$

Simplificando a equação, temos: m^2 + 3m – 4 ≠ 0. Implica em (m + 4).(m – 1) ≠ 0. Logo basta que m ≠ - 4 e m ≠ 1.

37) Calcule os valores de m para que o sistema $\begin{cases} 2x + my = 3 \\ mx + 8y = 6 \end{cases}$ tenha solução única.

Solução.

Utilizando a comparação das razões dos coeficientes, temos que o sistema é possível e determinado (solução única), se $\frac{2}{m} \neq \frac{m}{8} \Rightarrow m^2 \neq 16$.

Simplificando a equação, temos: $m^2 - 16 \neq 0$. Implica em $(m + 4).(m - 4) \neq 0$. Logo basta que $m \neq -4$ e $m \neq 4$.

38) (UF - SC) Sejam $A = (a_{ij})_{4\times3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times4}$ duas matrizes definidas por $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = 2i + j$, respectivamente. Se $A \cdot B = C$, então qual é o elemento c_{32} da matriz C ?

Solução.

O elemento c_{32} é o produto da 3ª linha da matriz A pela 2ª coluna da matriz B. Então bas ta utilizar as leis de a_{ij} e b_{ij} para encontrar essa linha e coluna.

i) A 3ª linha de A possui os elementos: $a_{31} = 3 + 1 = 4$; $a_{32} = 3 + 2 = 5$; $a_{33} = 3 + 3 = 6$.

ii) A 2ª coluna de B possui os elementos: $b_{12} = 2(1) + 2 = 4$; $b_{22} = 2(2) + 2 = 6$; $b_{32} = 2(3) + 2 = 8$.

Logo, $c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 4.4 + 5.6 + 6.8 = 16 + 30 + 48 = 94$

OBS. Não é necessário formar as matrizes. Mas se fosse o caso elas seriam:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

39) Resolva o sistema $\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -9 & 19 \end{pmatrix} \\ X - 4Y = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -18 \end{pmatrix} \end{cases}$

Solução.

Multiplicando a 2ª equação por -2 em ambos os membros, temos:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -9 & 19 \end{pmatrix} \\ X - 4Y = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -18 \end{pmatrix} \ \mathbf{x\ (-2)} \end{cases} \quad \text{Temos: } \begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -9 & 19 \end{pmatrix} \\ -2X + 8Y = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -2 & 36 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Aplicando o método de adição, vem:

$$0X + 11Y = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -11 & 55 \end{pmatrix}.$$

Se Y = $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ calculamos 11Y = $\begin{pmatrix} 11y_1 & 11y_2 \\ 11y_3 & 11y_4 \end{pmatrix}$ = $11Y = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -11 & 55 \end{pmatrix}$.

Comparando os termos, vem:

$$\begin{cases} 11y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0. \\ 11y_2 = 11 \Rightarrow y_2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 11y_3 = -11 \Rightarrow y_3 = -1. \\ 11y_4 = 55 \Rightarrow y_4 = 5. \end{cases}$$

Logo Y = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Substituindo na 1ª equação do sistema e expressando o valor de X, temos:

$$2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -9 & 19 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -9 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo agora os sistemas em x, temos:

$$\begin{cases} 2x_1 = 8 \Rightarrow x_1 = 4. \\ 2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_3 = -6 \Rightarrow x_3 = -3. \\ 2x_4 = 4 \Rightarrow x_4 = 2. \end{cases}$$

. Logo X = $\boxed{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$. A solução é V = { $\boxed{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$, $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}$ }

40) Considere $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Determine $\left(A^{-1}\right)^2 + A^t$.

Solução.

Encontrar A^{-1} significa encontrar a solução de: $\boxed{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Desenvolvendo a multiplicação e expressando o sistema, temos:

$$\boxed{\begin{matrix} \begin{cases} 5a + c = 1 \\ 4a + 0c = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5b + d = 0 \\ 4b + 0d = 1 \end{cases} \end{matrix}}$$

. Da 2ª equação, temos que: 4a = 0. Logo a = 0. Substituindo na 1ª equação, temos: 5(0) + c = 1. Logo c = 1. A 4ª equação fornece 4b = 1. Logo b = 1/4. A 3ª indica que d = -5b ou d = -5/4.

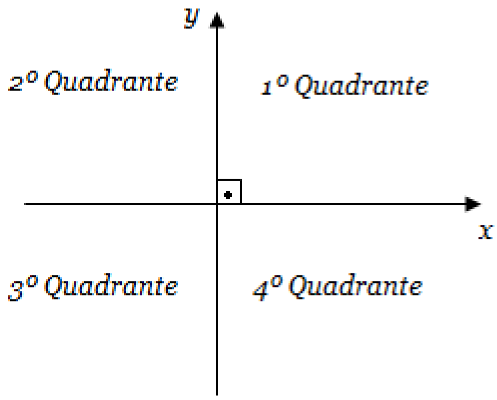
Logo $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -5/4 \end{pmatrix}$. Calculando $(A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -5/4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -5/16 \\ -5/4 & 29/16 \end{pmatrix}$.

Calculando a transposta, vem: $A^t = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Finalizando: $(A^{-1})^2 + A^t = \begin{pmatrix} 1/4 & -5/16 \\ -5/4 & 29/16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/4 & 59/16 \\ -1/4 & 29/16 \end{pmatrix}$

SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL NO PLANO

É um sistema composto por dois eixos perpendiculares entre si, ou seja, o eixo das *abscissas (eixo* x*)* e o eixo das *ordenadas (eixo* y*)* que dividem o plano em quatro quadrantes. Com este sistema, podemos localiza pontos no plano que são chamados de pares ordenados (x, y).



EXERCÍCIOS

1) Localize no plano cartesiano os pontos:

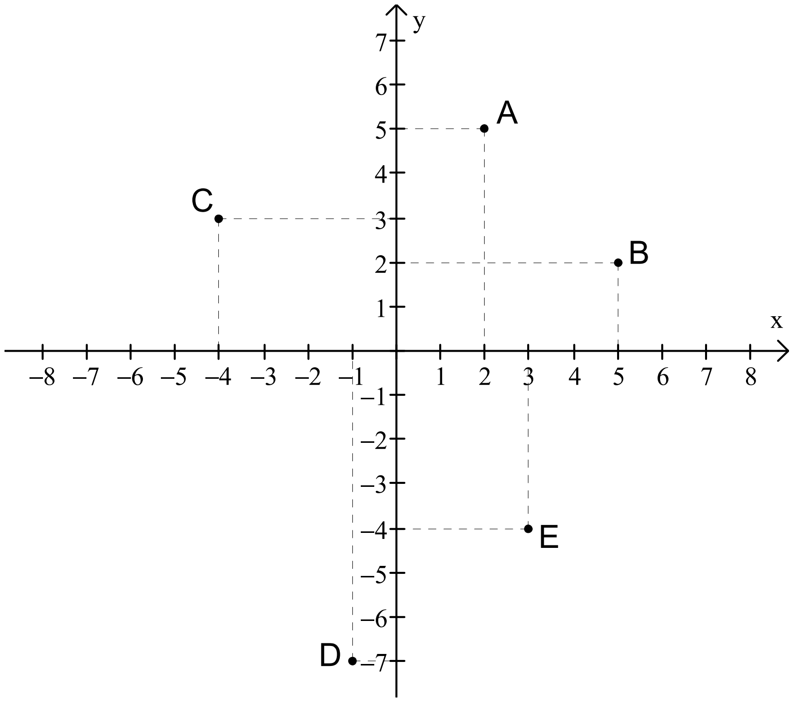
a) $A(3,2)$ b) $B(-1,4)$ c) $C(0,-2)$ d) $D(-5,0)$ e) $A(-2,-4)$

2) Determine o quadrante em que se encontra os pontos abaixo:

a) $A(7,15)$ d) $D(-5,-1)$ g) $G(-7,1)$
b) $B(-3,2)$ e) $E(2,-1)$ h) $H(-4,-4)$
c) $C(4,-2)$ f) $F(3,4)$ i) $I(0,5)$

3) O ponto B tem ordenada diferente de zero e abscissa nula, determine o eixo em que B se encontra.

4) Dado o diagrama, determine as coordenadas dos pontos A, B, C, D e E:



5) Represente, no sistema cartesiano ortogonal adequado, os pontos:

A(-1 , 4)	D(-2 , -2)	G(1 , 5 , 3)	J(0 , 0 , 1)
B(3 , 3)	E(-2 , 0)	H(2 , 0 , 2)	K(0 , 3 , 5)
C(2 , -5)	F(0 , 1)	I(2 , 2 , 3)	L(2 , 4 , 0)

VETORES

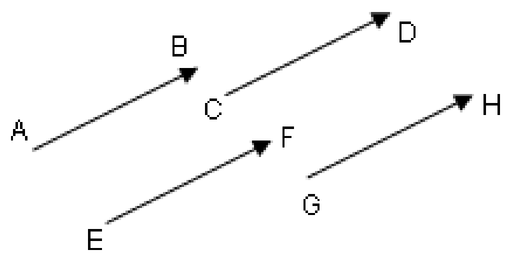
Existem dois tipos de grandezas:

- Escalares: são as grandezas definidas por apenas um número real e acompanhadas de uma unidade adequada, como comprimento, área, volume, massa, entre outras.
- Vetoriais: são as grandezas que precisamos conhecer seu módulo (ou comprimento ou intensidade), sua direção e seu sentido, como força, velocidade, aceleração entre outras e é representado por um segmento orientado (uma flecha).

Há diferença entre direção e sentido:

- Direção: horizontal, vertical, circular, inclinada.
- Sentido: à direita, à esquerda, anti-horário, horário.

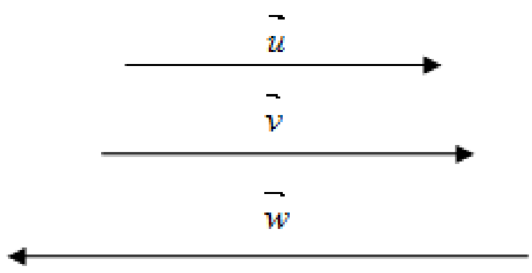
O vetor é representado por um segmento orientado (uma flecha) sendo o seu módulo dado pelo comprimento do segmento e direção e sentidos definidos.



NOTAÇÃO: $\overrightarrow{AB}$ (vetor correspondente ao segmento orientado com origem em A e extremidade em B)

OBSERVAÇÕES

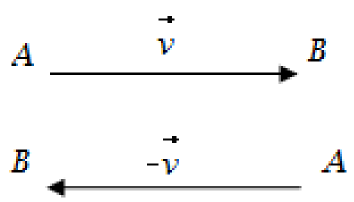
a) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos, e indica-se por $\vec{u} // \vec{v} // \vec{w}$, se os seus representantes tiverem a mesma direção.



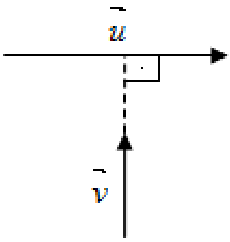
b) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são iguais, e indica-se por $\vec{u} = \vec{v}$, se tiverem iguais o módulo, a direção e o sentido.

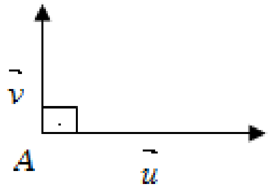
c) Vetor nulo é aquele em que a origem coincide com a extremidade sendo indicado por $\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AA}$ e por não possui direção e nem sentido definidos, considera-se o vetor nulo ou zero paralelo a qualquer vetor.

d) Vetor oposto possui mesmo módulo e mesma direção, porém com sentido contrário. Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$, isto é, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

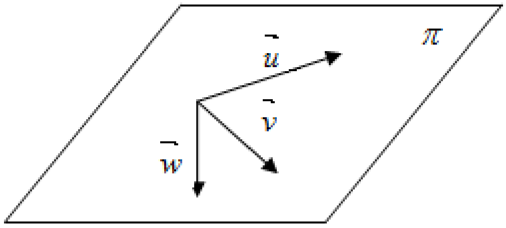


e) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se formarem ângulo reto (90º) e indica-se por $\vec{u} \perp \vec{v}$.

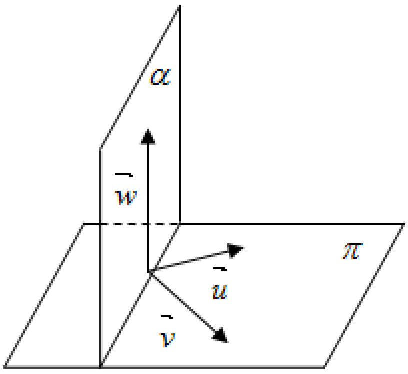




f) dois ou mais vetores são coplanares se existir algum plano onde estes vetores estão representados.



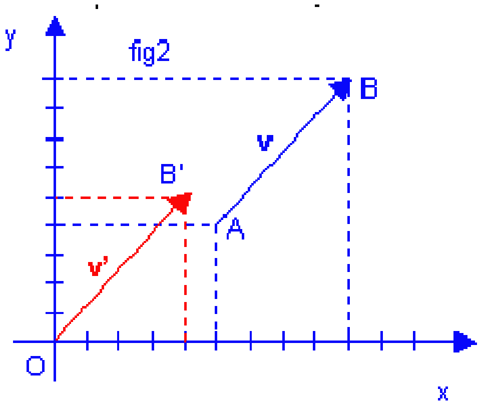
$\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares



$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares e $\vec{w}$ não é coplanar a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

VETORES EM R^2

Os vetores de R^2 podem ser representados no plano cartesiano, conforme indicado na fig.2.



A figura acima mostra o vetor **v** cuja origem é o ponto A = (5, 4) e cuja extremidade é o ponto B = (9, 9).

Em geral, usa-se na álgebra vetorial substituir o vetor por um vetor equivalente (vetor de mesmo módulo, mesma direção ou direção paralela e mesmo sentido) cuja origem coincide com a origem dos eixos cartesianos.

Esse vetor será indicado por **v** = (4, 5) onde (4, 5) são as coordenadas de sua extremidade.

O módulo do vetor **v** = (x, y), de acordo com o teorema de Pitágoras é $|\mathbf{v}| = v = \sqrt{x^2 + y^2}$

VETORES EM R³

No espaço tridimensional, cada ponto é indicado por três coordenadas (x, y, z). Assim, todo vetor de R^3, localizado na origem será indicado por (x, y, z) onde (x, y, z) são as coordenadas de suas extremidades.

Assim, o vetor **u** da figura abaixo, será **u** = (x, y, z).

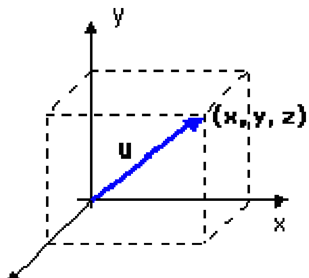


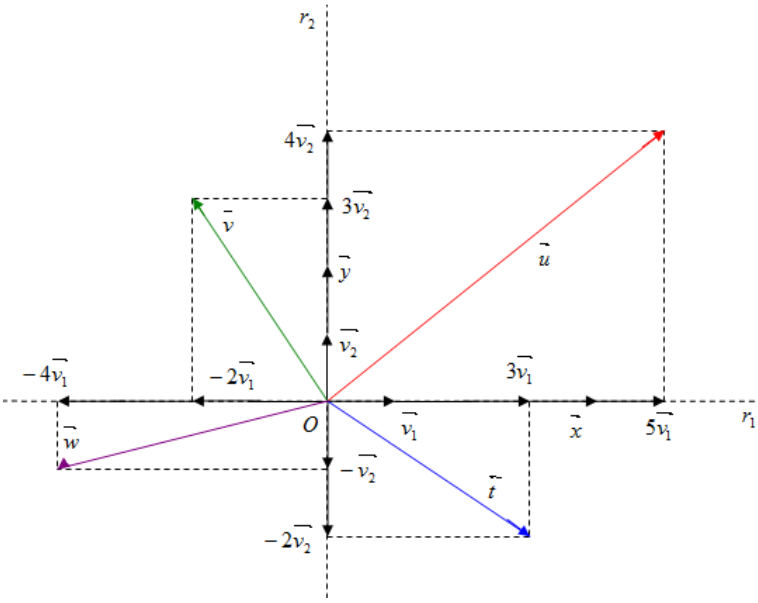
Fig.3

O módulo do vetor **u**, de R^3 é determinado por

$$u = |\ \mathbf{u}\ | = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

<u>VETORES NO PLANO</u>

Dados dois vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não paralelos, representados com a origem no mesmo ponto O e as retas r_1 e r_2 contendo estes representantes, respectivamente,



Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$, $\vec{x}$ e $\vec{y}$, representados na figura, são expressos em função de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ por:

$$\vec{u} = 5\vec{v_1} + 4\vec{v_2}$$
$$\vec{v} = -2\vec{v_1} + 3\vec{v_2}$$
$$\vec{w} = -4\vec{v_1} - \vec{v_2}$$
$$\vec{t} = 3\vec{v_1} - 2\vec{v_2}$$
$$\vec{x} = 4\vec{v_1} + 0\vec{v_2}$$
$$\vec{y} = 0\vec{v_1} + 2\vec{v_2}$$

Aplicações da álgebra vetorial

Distância entre dois pontos

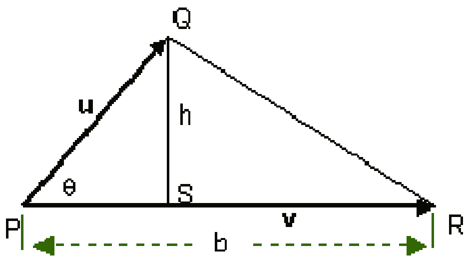
Sejam A = (x_1, y_1, z_1) e B = (x_2, y_2, z_2) dois pontos no espaço R^3. A distância entre os pontos A e B é igual ao módulo do vetor AB, que, conforme visto no capítulo 1, se determina por $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, onde $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$ e $z = z_2 - z_1$.

No plano a distância entre os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é $d = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Área de um triângulo

A área do triângulo é determinada por: A = b.h/2, que para o triângulo PQR torna-se A = (1/2)PR.QS.

No triângulo PQR, tem-se: h = PQ.sen θ. Assim, a área é A = (1/2)PR.PQ.sen θ.



Ora, PR é o módulo do vetor **u** e QS o módulo do vetor **v**. Portanto, A = (1/2).| **u** |.| **v** |.sen θ.

O produto | u |. | v |. sen θ é exatamente o módulo do produto vetorial de u por v. Portanto, temos A = (1/2). | **u** x **v**

Exemplo:- Calcular a área do triângulo de vértices A = (1, 2, 5), B = (5, -3, 7) e C = (0, -4, -2). Façamos **u** = B - A e **v** = C - A. Desta forma teremos: **u** = (5 -1, -3 - 2, 7 - 5) e **v** = (0 -1, -4 - 2, -2 - 5) ==> **u** = (4, -5, 2) e **v** = (-1, -6, -7).

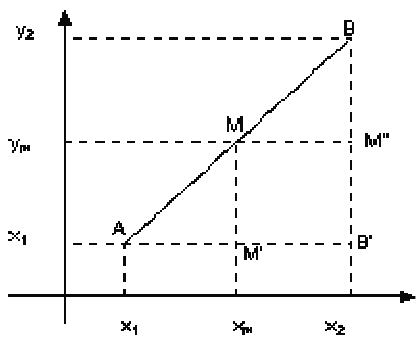
Calculando u x v obtém-se: **u** x **v** = (47, 26, -29) cujo módulo é $\sqrt{47^2 + 26^2 (-29)^2} = \sqrt{3146}$. A área do triângulo é então: $A = (1/2).\sqrt{3146}$.

Obs.1 - Para encontrar a área do triângulo A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) e C = (x_3, y_3), onde os lados são pontos do plano, complete as coordenadas com $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ e aplique o mesmo raciocínio anterior.

Obs. 2 - A área do quadrilátero ABCD equivale à soma das áreas dos triângulos ABC e ACD.

<u>PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO</u>

Dados os pontos A (x_1, y_1) e B (x_2, y_2), o ponto médio é aquele que divide o segmento em dois segmentos cujas medidas são iguais á metade da medida do segmento AB. Na figura a seguir, M(xm, ym) é o ponto médio do segmento AB.



Pela semelhança dos triângulos ABB' e AMM' podem escrever:

AM / AB = AM' / AB' ==> 1 / 2 = ($x_m - x_1$) / ($x_2 - x_1$) ==> $2x_m - 2x_1 = x_2 - x_1$ ==> $2x_m = x_2 + x_1$ ==> $x_m = (x_2 + x_1)/2$.

Pela semelhança dos triângulos BAB' e BMM' tira-se BM / BA = BM' / BB' ==> $1 / 2 = (y_2 - y_m) / (y_2 - y_1)$ de onde se conclui $y_m = (y_2 + y_1)/2$.

Portanto, o ponto médio do segmento AB, com A (x_1, y_1) e B (x_2, y_2), é $[(x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2]$. O raciocínio pode ser estendido para o espaço R^3, sendo $[(x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2, (z_1 + z_2)/2]$ as coordenadas do ponto médio do segmento AB, sendo A = (x_1, y_1, z_1) e B = (x_2, y_2, z_2).

Exercícios

1) Calcule a área do triângulo formado pelos pontos médios dos lados do triângulo ABC sendo A = (3, 2, 5), B = (5, -3, 7) e C = (0, -4, -2).

2) Calcule a área e o perímetro do triângulo ABC se A = (3, 2, 5), B = (5, -3, 7) e C = (0, -4, -2).

3) Note que o triângulo ABC dos exercícios 1 e 2 é o mesmo. Compare as áreas obtidas nos dois exercícios. Que conclusão se pode tirar a respeito da área de um triângulo e da área do triângulo formado pelos pontos médios desse triângulo?

4) Calcule as medidas das medianas do triângulo de vértices A = (3, 2, 5), B = (5, -3, 7) e C = (0, -4, -2).

5) Em cada caso, calcule a distância entre os pontos A e B e represente-os no sistema de coordenadas cartesianas adequado:

a) A(1 , 3) e B(-2 , 1).
b) P(3 , -4) e O é a origem.
c) A(0 , 2 , 1) e B(2 , 2 , 3)
d) A(1 , 2 , 2) e B(2 , 5 , 6)

6) O triângulo ABC tem vértices A(3 , 1); B(-1 , 1) e C(-1 , 4). Calcule o seu perímetro. Desenhe o triângulo.

7) Determinar o ponto $P \in IR^2$, pertencente ao eixo y, eqüidistante dos pontos A (2 , 0) e B (2 , 4).

8) Determinar o ponto $P \in IR^3$, pertencente ao eixo x e eqüidistante dos pontos A(-1 , 2 , 5) e B (1 , 4 , 2).

9) Determinar o ponto $P \in IR^3$, eqüidistante dos pontos A (0 , 1 , 2) e B (4 , -1 , 3) cuja ordenada é o triplo da abscissa e cuja cota é nula.

10) Determinar o ponto $P \in IR^2$, de abscissa 5, que dista 2 do ponto A(4 , 1).

11) Determine a área e o perímetro de um quadrado que tem como vértices consecutivos os pontos A (3 , 5 , 2) e B (4 , 0 , 2).

12) Dê as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$, calcule a sua norma e faça a representação gráfica:

a) A(2 , 5)
B(1 , 3)

b) A(-1 , 4)
B(3 , 4)

c) A(1 , -1)
B(-2 , -3)

d) A(3 , 2)
B(3 , 2)

e) A(2 , 4 , 4)
B(2 , 7 , 6)

13) Determine a extremidade do segmento que representa o vetor $\vec{v}$ = (2 , -5) sabendo que sua origem é o ponto A(-1 , 3).

14) Dados A(0 , 1); B(1 , 0); C(1 , 2) e D(2 , 1) mostre que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Represente graficamente.

<u>Respostas dos exercícios</u>

5) a) $\sqrt{13}$ un
b) 5 un
c) $2\sqrt{2}$ un
d) $\sqrt{26}$ un

6) 12 un

7) P(0 , 2)

8) $P\left(-\frac{9}{4}, 0, 0\right)$

9) $P\left(-\frac{21}{4}, -\frac{63}{4}, 0\right)$

10) P(5 , 1 + $\sqrt{3}$) ou P(5 , 1 - $\sqrt{3}$)

11) Área = 26 un^2
Perímetro = $4\sqrt{26}$ un

12) a) $\overrightarrow{AB} = (-1\,,\,-2)$; $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{5}\,\text{un}$

b) $\overrightarrow{AB} = (4\,,\,0)$; $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 4\,\text{un}$

c) $\overrightarrow{AB} = (-3\,,\,-2)$; $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{13}\,\text{un}$

d) $\overrightarrow{AB} = (0\,,\,0)$; $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 0\,\text{un}$

e) $\overrightarrow{AB} = (0\,,\,3\,,\,2)$; $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{13}\,\text{un}$

13) (1 , -2)

14) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (1\,,\,-1)$

IGUALDADE DE VETORES

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$, escrevendo-se $\vec{u} = \vec{v}$.

OPERAÇÕES COM VETORES

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\alpha \in \Re$. Define-se:

1) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

2) $\alpha \vec{u} = (\alpha\, x_1, \alpha\, y_1, \alpha\, z_1)$

VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS

Sendo $A(x_1, y_1, z_1)$ a origem de um vetor e $B(x_2, y_2, z_2)$ a sua extremidade, e se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$,temos:

$$\vec{v} = B - A \Leftrightarrow \vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

OBS: da equação $\vec{v} = B - A$, podemos tirar:

Origem: $\vec{v} = B - A \Leftrightarrow A = B - \vec{v}$

Extremidade: $\vec{v} = B - A \Leftrightarrow B = A + \vec{v}$

Exercícios

1) Dados A(0 , 1); B(1 , 0); C(1 , 2) e D(2 , 1) mostre que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Represente graficamente.

2) Calcule o vetor soma e o vetor diferença em cada caso. Faça a representação gráfica de todos os vetores:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$

A (1 , 2)   C (3 , 9)

B (5 , 7)   D (5 , 10)

b) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$

A (7 , 3)   C (6 , 8)

B (9 , 7)   D (1 , 10)

Respostas dos exercicios

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (1\ ,\ -1)$

2) a) $\vec{a} + \vec{b} = (6\ ,\ 6)$ e $\vec{a} - \vec{b} = (2\ ,\ 4)$

b) $\vec{a} + \vec{b} = (-3\ ,\ 6)$ e $\vec{a} - \vec{b} = (7\ ,\ 2)$

MÓDULO DE UM VETOR

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

EXERCÍCIOS

1) Determinar o valor de x e y sabendo que $\vec{u} = (x+1, 3)$ e $\vec{v} = (5, 2y-5)$ são iguais.

2) Dados os vetores $\vec{u} = (1, -3)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar:

a) $3\vec{u} + 2\vec{v}$ b) $3\vec{u} - 2\vec{v}$

3) Determinar o vetor $\vec{x}$ na igualdade $3\vec{x} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{x}$, sendo dados $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 4)$.

4) Encontrar os números a_1 e a_2 tais que $\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$, sendo dados $\vec{v} = (2,10)$, $\overrightarrow{v_1} = (5,3)$ e $\overrightarrow{v_2} = (2,-1)$.

5) Dados os pontos $A(-2,1)$, $B(1,-3)$ e $C(-4,2)$, determinar o ponto D de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

6) Sendo $A(4,-2)$ e $B(1,4)$ extremidades de um segmento, determinar os pontos F e G que dividem AB em três segmentos de mesmo comprimento.

7) Dados os vetores $\vec{u} = (3,-1)$ e $\vec{v} = (-2,-1)$, determinar:

a) $|\vec{u}|$ b) $|\vec{u} + \vec{v}|$ c) $|2\vec{u} - 3\vec{v}|$

8) Determinar, no eixo Ox, um ponto P que seja equidistante dos pontos $A(-2,-1)$ e $B(-4,5)$.

9) Dados os pontos $A(0,1,-1)$ e $B(1,1,-1)$ e os vetores $\vec{u} = (-2,-1,1)$, $\vec{v} = (0,3,-1)$ e $\vec{w} = (-1,2,2)$, verificar se existem os números a_1, a_2 e a_3 tais que $\vec{w} = a_1\overrightarrow{AB} + a_2\vec{u} + a_3\vec{v}$.

10) Sabendo que o ponto $P(-3, m, n)$ pertence à reta que passa pelos pontos $A(1,-2,4)$ e $B(-1,-3,1)$, determinar m e n.

11) Dados os vetores $\bar{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$, $\bar{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\bar{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, determinar:

a) $2\vec{u} - \vec{v}$ b) $\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w}$ c) $\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$ d) $3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

12) Dados os vetores $\vec{u} = (-3,1)$ e $\vec{v} = (1,2)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que:

a) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{x}$ b) $3\vec{x} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{x} - 3\vec{u})$

13) Dados os pontos $A(-3,1)$, $B(2,5)$, $C(-1,3)$ e $O(0,0)$, calcular:

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$ c) $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$

14) Dados os vetores $\vec{u} = (-4,2)$, $\vec{v} = (1,-5)$ e $\vec{w} = (6,-12)$, determinar a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$.

15) Dados os pontos $A(-4,3)$ e $B(-1,1)$ e o vetor $\vec{v}=(3,-2)$, calcular:

a) $(B-A)+2\vec{v}$ b) $(A-B)-\vec{v}$ c) $B+2(B-A)$ d) $3\vec{v}-2(A-B)$

16) Sejam os pontos $A(1,-5)$ e $B(3,1)$. Determinar o vetor $\vec{v}=(a,b)$ tal que:

a) $B=A+2\vec{v}$ b) $A=B+3\vec{v}$

17) Dados os pontos $A(2,-3)$ e $B(-2,5)$, determinar os pontos M e N pertencentes ao segmento AB tais que $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

18) Dados os vetores $\vec{u}=(-1,1)$, $\vec{v}=(4,-3)$ e $\vec{w}=(-6,8)$, calcular:

a) $|\vec{u}|$ b) $|\vec{v}|$ c) $|\vec{w}|$

19) Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{u}=(a,-2)$ tenha módulo 4.

20) Encontrar o ponto P de eixo Ox de modo que a sua distância ao ponto $A(-3,2)$ seja igual a 5.

21) Dados os pontos $A(2,-2,3)$ e $B(1,-1,5)$ e o vetor $\vec{v}=(1,3,4)$, calcular:

a) $A+3\vec{v}$ b) $(A-B)-\vec{v}$ c) $B+2(B-A)$ d) $2\vec{v}-3(B-A)$

22) Dados os pontos $A(1,2,-3)$, $B(2,1,4)$ e $C(-1,-3,-1)$, determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

23) Sabendo que $3\vec{u}-4\vec{v}=2\vec{w}$, determinar *a, b* e *c*, sendo $\vec{u}=(2,-1,c)$, $\vec{v}=(a,b-3,3)$ e $\vec{w}=(4,-1,0)$.

Dados os vetores $\vec{u}=(-2,3,1)$, $\vec{v}=(1,1,-2)$ e $\vec{w}=(-3,4,0)$

24) Determinar o vetor $\vec{x}$ de modo que $3\vec{u}-\vec{v}+\vec{x}=4\vec{x}+2\vec{w}$;

25) Encontrar os valores a_1, a_2 e a_3 tais que $a_1\vec{u}+a_2\vec{v}+a_3\vec{w}=(-2,13,-5)$.

PRODUTO ESCALAR

Chama-se produto escalar de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, e se representa por $\vec{u} \bullet \vec{v}$, ao número real $\vec{u} \bullet \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ também é indicado por $<\vec{u},\vec{v}>$ e se lê "$\vec{u}$ escalar $\vec{v}$".

Exemplos:

1) Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 5\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, calcule $\vec{u} \bullet \vec{v}$.

2) Sejam os vetores $\vec{u} = (-3,2,1)$ e $\vec{v} = (1,-4,1)$. Calcular:

a) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (2\vec{u} - \vec{v})$ b) $\vec{u} \bullet \vec{u}$ c) $\vec{0} \bullet \vec{u}$

3) Dados os vetores $\vec{u} = (4,\alpha,-1)$ e $\vec{v} = (\alpha,-2,3)$ e os pontos $A(-4,1,2)$ e $B(3,-1,2)$, determinar o valor de α tal que $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \overrightarrow{BA}) = 5$.

EXERCÍCIOS

1) Dados os vetores $\vec{u} = (1,-3,-1)$ e $\vec{v} = (1,-1,4)$, calcular:

a) $2\vec{u} \bullet (-\vec{v})$ b) $(\vec{u} + 3\vec{v}) \bullet (\vec{v} - 2\vec{u})$ c) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v})$ d) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{v} - \vec{u})$

2) Sejam os vetores $\vec{u} = (2,a,1)$, $\vec{v} = (3,-1,2)$ e $\vec{w} = (2a-1,-2,4)$. Determinar a de modo que $\vec{u} \bullet \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{v} + \vec{w})$.

3) Dados os pontos $A(4,-1,0)$, $B(2,1,-2)$ e $C(1,-3,2)$ e os vetores $\vec{u} = (2,1,1)$ e $\vec{v} = (-1,2,-3)$, obter o vetor $\vec{x}$ tal que:

a) $3\vec{x} + 2\vec{v} = \vec{x} + (\overrightarrow{AB} \bullet \vec{u})\vec{v}$ b) $(\overrightarrow{BC} \bullet \vec{v})\vec{x} = (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{v} - 3\vec{x}$

PRODUTO VETORIAL

DEFINIÇÃO DE PRODUTO VETORIAL: Chama-se produto vetorial de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, tomados nesta ordem, e se representa por $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$, ao vetor.

$$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ x } \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\mathrm{j}} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{\mathrm{k}}$$

O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ também é indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e lê-se "$\vec{u}$ vetorial $\vec{v}$".

Dispositivo prático para o cálculo de $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

EXERCÍCIOS

1) Calcular $\vec{u} \text{ x } \vec{v}$ para $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$.

Se $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$, determinar:

1) $(2\vec{v}) \text{ x } (3\vec{v})$
2) $(\vec{u} \text{ x } \vec{w}) + (\vec{w} \text{ x } \vec{u})$
3) $(\vec{u} \text{ x } \vec{v}) \text{ x } (\vec{v} \text{ x } \vec{u})$
4) $(\vec{u} - \vec{v}) \text{ x } \vec{w}$
5) $(\vec{u} \text{ x } \vec{v}) \text{ x } \vec{w}$
6) $\vec{u} \text{ x } (\vec{v} \text{ x } \vec{w})$
7) $\vec{u} \text{ x } (\vec{v} + \vec{w})$
8) $\vec{u} \text{ x } \vec{v} + \vec{u} \text{ x } \vec{w}$
9) $(\vec{u} \text{ x } \vec{v}) \bullet \vec{v}$

10) $\left(\vec{u} \text{ x } \vec{\text{v}}\right) \bullet \vec{w}$

11) $\vec{u} \bullet \left(\vec{v} \text{ x } \vec{\text{w}}\right)$

12) Dados os pontos $A(2,2,-1)$, $B(3,0,-1)$ e $C(-3,-1,2)$, determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ x } \overrightarrow{\text{AC}}$.

VETORES LINEARMENTE DEPENDENTES E LINEARMENTE INDEPENDENTES

- **NO PLANO**

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ditos linearmente dependentes (LD) se um deles for nulo ou se forem vetores paralelos. Caso isso não ocorra, os vetores são ditos linearmente independentes (LI).

Logo, concluímos que os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_1, y_2)$são linearmente dependentes (LD) se e somente se as correspondentes componentes são proporcionais, ou seja, existe α tal que
$$\begin{cases} x_1 = \alpha \ y_1 \\ y \ \ = \alpha \ y_2 \end{cases}.$$

- **NO ESPAÇO**

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ditos *linearmente dependentes* (LD) se um deles for nulo ou se forem *vetores paralelos*. Caso isso não ocorra, os vetores são ditos *linearmente independentes* (LI).

Análogo ao plano, os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_1, y_2, z_2)$são *linearmente dependentes* (LD) se e somente se as correspondentes componentes são proporcionais, ou seja, existe α tal que
$$\begin{cases} x_1 = \alpha \ x_2 \\ y_1 = \alpha \ y_2 \\ z_1 = \alpha \ z_2 \end{cases}.$$

Os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_1, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$são ditos *linearmente dependentes* (LD) se
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

EXEMPLOS

Dados os vetores $\vec{a} = (2,4)$, $\vec{b} = (4,8)$, $\vec{c} = (3,5)$, $\vec{d} = (0,0)$, $\vec{e} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, verifique se os vetores são linearmente dependentes ou independentes:

1) $\{\vec{a},\vec{b}\}$

2) $\{\vec{a},\vec{c}\}$

3) $\{\vec{a},\vec{d}\}$

4) $\{\vec{a},\vec{e}\}$

5) $\{\vec{c},\vec{d}\}$

Verifique se os vetores abaixo são linearmente dependentes ou linearmente independentes:

1) $\vec{u}=(-1,-1,-2)$, $\vec{v}=(0,1,3)$ e $\vec{w}=(4,-3,11)$

2) $\vec{u}=(1,-1,3)$, $\vec{v}=(2,1,3)$ e $\vec{w}=(-1,-1,4)$

EXERCÍCIOS

Dados os vetores abaixo, verifique se os vetores são linearmente dependentes ou independentes:

1) $\vec{a}=\left(\frac{5}{27},\frac{1}{9}\right)$ e $\vec{b}=(3,5)$

2) $\vec{c}=(-6,12)$ e $\vec{d}=(3,-5)$

3) $\vec{e}=(2,4)$ e $\vec{f}=(0,0)$

4) $\vec{g}=(1,0,1)$ e $\vec{h}=(0,1,0)$

5) $\vec{i}=(1,3,2)$ e $\vec{j}=(2,1,1)$

6) $\vec{k}=(1,-1,2)$, $\vec{l}=(2,-1,0)$ e $\vec{m}=(1,0,2)$

7) $\vec{n}=(1,2,1)$, $\vec{o}=(4,5,-1)$ e $\vec{p}=(1,-1,7)$

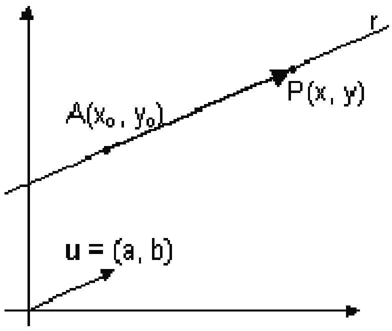
8) $\vec{q} = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\vec{r} = (7, -1, -1)$

9) Determine $\lambda \in$ IR, de modo que os vetores $\vec{a}$ = (-1 , 0 , λ), $\vec{b}$ = (2 , -3 , 5) e $\vec{c}$ = (λ , 2 , 1) sejam LD.

10) Determine $\lambda \in$ IR, de modo que os vetores $\vec{a}$ = (λ , -1 , 2), $\vec{b}$ = (0 , λ , 3) e $\vec{c}$ = (4, -3 , 11) sejam LI.

EQUAÇÃO DA RETA NO PLANO

A reta tem como equação uma função de primeiro grau, podendo se apresentar sob diversas formas. Entre as formas iremos analisar: as paramétricas, a reduzida, a geral e a segmentária. Seja então a reta apresentada na figura abaixo:



Equações paramétricas

Uma reta fica perfeitamente definida se conhecermos um de seus pontos e uma direção paralela a ela.

Sejam então: A(x_o, y_o) um ponto da reta, **u** = (a, b) um vetor paralelo à reta e P(x, y) um ponto genérico dessa reta.

Como a reta r é paralela ao vetor **u**, podemos escrever: P - A = λ .u $\Leftrightarrow$ (x - x_o, y - y_o) = λ.(a, b) $\Leftrightarrow$ x - x_o = λa e y - y_o = λb $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x = x_0 + a.\lambda \\ Y = y_0 + b.\lambda \end{cases}$$

que são as equações paramétricas da reta.

Exemplos:-

1) Escrever a equação da reta que passa pelo ponto (2, -4) cuja direção é definida pelo vetor (5, 3).

Solução:- A solução é imediata de acordo com o que foi visto acima. Resposta: $x = 2 + 5\lambda$ e $y = -4 + 3\lambda$.

2) Verifique se o ponto (3, - 8) pertence ou não à reta $x = -2 + \lambda$ e $y = 4 + 2\lambda$. Solução:- Para que (3, -8) pertença à reta, estas coordenadas devem verificar as duas equações.

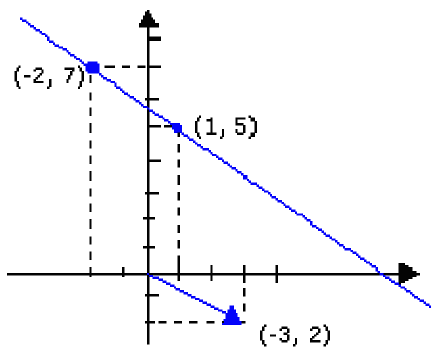
Na primeira equação: $3 = -2 + \lambda \Rightarrow \lambda = 5$. Levando esse valor para a segunda equação resulta: $y = 4 + 2.5 = 14$. Como y deve ser igual a -8, o ponto não pertence à reta.

3)Construa o gráfico da reta $x = -2 - 3\lambda$ e $y = 7 + 2\lambda$.

Solução:- Para construir o gráfico basta determinar dois pontos da mesma. Para isso, atribui-se valores

para λ e calculam-se os valores de x e y. Assim, para $\lambda = 0$, temos: $x = -2 - 3.0 = -2$ e $y = 7 + 2.0 = 7$.

Para $\lambda = -1$, $x = -2 - 3.(-1) = 1$ e $y = 7 + 2.(-1) = 5$. Temos assim dois pontos (-2, 7) e (1, 5). Marcando esses pontos no sistema de eixos cartesianos, e ligando-os por uma reta teremos o gráfico construído.



4) Dê um vetor v da forma (9x, 12) que seja paralelo à reta $x = -2 + 3\lambda$ e $y = 7 - 2\lambda$. Solução:- Um vetor paralelo à reta é **u** = (3, -2), tirado da própria equação. Ora, se **v** é paralelo à reta então **v** é paralelo a **u**. Assim **v** = k**u** $\Rightarrow$ (9x, 12) = k(3, -2) $\Rightarrow$ -2k = 12 e 3k = 9x. De -2k = 12 tira-se k = -6 que levado em 3k = 9x $\Rightarrow$ -18 = 9x $\Rightarrow$ x = -2. O vetor é então (-18, 12).

.

Equação segmentária

Eliminando o valor de nas equações paramétricas obtém-se:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

que é a equação segmentária da reta.

Nesta forma, (a, b) é um vetor paralelo à reta e (x_0, y_0) é um ponto conhecido.

Equação reduzida

Da equação segmentária da reta, tiramos $bx - bx_o = ay - ay_o \Rightarrow ay = bx - bx_o + ay_o \Rightarrow y = (b/a)x + (ay_o - bx_o)$. Fazendo $b/a = m$ e $ay_o - bx_o = h$, resulta: $y = mx + h$. Esta forma de apresentação da equação da reta é chamada de forma reduzida. Observe que $m = b/a$ é a tangente do ângulo que o vetor (a, b) forma com o eixo positivo dos x. O coeficiente m (= b/a) é chamado de inclinação, ou coeficiente angular ou declividade da reta. Além disso, se fizermos x = 0, resulta y = h, de onde se conclui que (0, h) é o ponto onde a reta corta o eixo vertical. O parâmetro h é chamado de parâmetro linear da reta. Com relação ao vetor que define a direção da reta, podemos escrever (1, b/a) = (1, m) é paralelo a a.(1, b/a) = (a, b). Ou seja, o vetor (1, m) é paralelo à reta y = mx + h.

Equação geral

Da expressão $bx - bx_o = ay - ay_o$ podemos obter $bx + (-a) y + a y_o - b x_o = 0$. Substituindo b por A, (-a) por B e $ay_o - bx_o$ por C, a igualdade anterior fica $A x + B y + C = 0$. Esta forma é chamada equação geral da reta.

Se considerarmos dois vetores (A, B) e (a, b), seu produto escalar é A a + B b. Como foi feito A = b e B = - a, teremos $A a + B b = b a + (- a) b = b a - a b = 0 \Rightarrow$ (A, B) é perpendicular a (a, b). Como (a, b) é paralelo à reta, podemos concluir que (A, B) é um vetor perpendicular à reta $A x + B y + C = 0$.

EXERCÍCIOS:

1) Seja $x = 3 + 4\lambda$ e $y = -5 + 2\lambda$ as equações paramétricas da reta. Escreva as equações simétricas, reduzida e geral para essa mesma reta.

2) Seja $y = 2x - 7$ e $4x + 3y + 2 = 0$ as equações reduzida e geral de duas retas. Escreva as demais formas de equações dessas retas.

3) Dê um vetor paralelo à cada uma das retas abaixo:

a) $x = -5 + 6\lambda$ e $y = 8 - 3\lambda$

b) $(x - 2)/5 = (y + 7)/3$

c) $y = 2x + 5$

d) $3x + 4y + 5 = 0$

4) Construa o gráfico de cada uma das retas citadas no exercício 3.

5) Dê um vetor perpendicular a cada uma das retas citadas no exercício 3.

6) O vetor $(k + 1, 7)$ é perpendicular à reta (i) $3x + 4y + 5 = 0$, (ii) $y = 2x - 5$ (iii) $(x - 2)/5 = (y + 7)/3$ (iv) $x = -5 + 6\lambda$ e $y = 8 - 3\lambda$. Determine, para cada caso, o valor de k.

7) Escreve, na diferentes formas da reta, a equação da reta que satisfaça as condições: (a) passa pelo ponto $(-8, 9)$ e é paralela ao vetor $(4, -2)$

(b) passa pelo ponto $(5, -4)$ e é perpendicular ao vetor $(7, -1)$

8) Calcule a área e o perímetro do triângulo cujos lados são segmentos das retas $y = 2x - 9$, $3x + 4y - 1 = 0$ e $(x - 1)/2 = (x + 1)/3$.

9) Dar as equações vetorial e paramétricas da reta r que passa por A(1 , -1) e tem vetor diretor $\vec{v} = (3 , 4)$. Faça a representação gráfica.

10) Verifique se os pontos B(4 , 3) e C(3 , 1) pertencem à reta r do exercício anterior.

11) Determine as equações vetorial e paramétricas da reta r determinada pelos pontos A(1 , 1) e B(2 , -3).

12) Determine as equações vetorial e paramétricas da reta r que passa pelos pontos A(1 , 0 , 1) e B(0 , 1 , 0).

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 6 - 5\lambda \end{cases}$$

12) Dadas as equações paramétricas de uma reta r, achar uma equação vetorial de r:

13) Verifique se o ponto P(4 , 1 , -1) pertence à reta r: X=(1 , 0 , 1) + λ(2 , 1 , 1) ; $\lambda \in$ IR.

14) Dar as equações vetorial e paramétricas da reta r que passa pela origem do sistema cartesiano e que tem vetor diretor $\vec{v}$=(2 , 1 , 3). Represente graficamente.

PARALELISMO E PERPENDICULARISMO DE RETAS EM R^2

As condições de paralelismo e perpendicularismo de duas retas podem ser analisadas a partir dos vetores paralelos ou perpendiculares às retas.

Lembrando:

(i) Dadas as equações x = x_o + aλ e y = y_o + bλ, (a, b) é um vetor paralelo à reta.

(ii) Na forma Ax + By + C = 0, (A, B) é um vetor perpendicular à reta.

(iii) Na forma y = m x + h, m = a/b, sendo (a, b) o vetor paralelo à reta.

(iv) Para duas retas paralelas, seus vetores (a, b) e (a', b') são da forma (a', b') = k(a, b) onde k é um número real.

(v) Para duas retas perpendiculares, os vetores (a, b) e (a', b') também serão perpendiculares. Neste caso, o produto escalar é nulo, ou seja, a a' + b b' = 0.

Usando as condições acima, é simples verificar se duas retas são paralelas ou perpendiculares, bem como encontrar uma reta que seja paralela ou perpendicular a outra reta dada.

Exemplo 1:

Determine a equação da reta que passa pelo ponto (2, 7) e que seja paralela à reta cujas equações paramétricas $x = 4 - 2\lambda$ e $y = 5 + 3\lambda$.

Solução:- Como a reta é paralela à reta dada, o vetor que define a direção de ambas é (-2, 3). Temos então: $x = 2 - 2\lambda$ e $y = 7 + 3\lambda$.

Exemplo 2:

Determine a equação da reta que passa pelo ponto (-2, 5) e é paralela à reta $y = 4x + 3$. Solução:- Como $m = 4$, temos $4 = a/b$. Como a reta passa pelo ponto (-2, 5), terá: $5 = 4.(-2) + h \Rightarrow h = 13$. Portanto, a equação da reta será $y = 4x + 13$.

Exemplo 3:

Determine a equação da reta paralela à $3x - 2y + 4 = 0$, que passa pelo ponto (1, 7). Solução:- (3, – 2) é um vetor perpendicular à reta dada. Como se quer uma reta paralela à primeira, este vetor também será perpendicular à reta cuja equação se quer determinar. Assim, $3.1 - 2.7 + C = 0 \Rightarrow C = 11 \Rightarrow 3x - 2y + 11 = 0$.

Exemplo 4:

Escreva a equação da reta que passa pelo ponto (2, -1), que seja perpendicular à reta r: $3x + 2y + 5 = 0$.

Solução:- O vetor (3, 2) é perpendicular à reta r, portanto, é paralelo à reta s. Assim, a equação da reta é $x = 2 + 3\lambda$ e $y = -1 + 2\lambda$.

Exemplo 5:

Escreva a equação da reta que passa pelo ponto (2, -1), perpendicular à reta $x = 2 + 4\lambda$ e $y = 5 - 3\lambda$.

Solução:- O vetor (4, -3) é paralelo à reta dada. Portanto, perpendicular à reta pedida. O vetor paralelo à reta pedida (a, b) deve ser tal que (a, b).(4, -3) = 0. Quaisquer valores de a e b que satisfaçam o produto, pode ser usado como vetor paralelo à reta. Pode-se então fazer a = 3 e b = 4, pois $3.4 + 4(-3) = 0$. Assim, a equação da reta pedida é $x = 2 + 3\lambda$ e $y = -1 + 4\lambda$.

EXERCÍCIOS:

1. Considere a reta r, dada por suas equações paramétricas: $x = 3 - 2\lambda$ e $y = -5 + 4\lambda$. Escreva, nas formas reduzidas e segmentária, a equação da reta que passa pelos pontos (-2, 3), sendo a mesma:

a) paralela a r

b) perpendicular a r.

2. Considere a reta r, dada sob a forma reduzida $y = (2/3)x - (4/5)$. Escreva, na forma geral e paramétrica, a equação da reta que passa pelo ponto (-1, -5), sendo a mesma:

a) paralela a r

b) perpendicular a r.

3. Considere a reta r, dada sob a forma geral, $3x - 2y + 6 = 0$. Escreva nas formas geral, reduzida e paramétrica, a equação da reta que passa pelo ponto (2, 5), sendo a mesma:

a) paralela a r

b) perpendicular a r.

4) Uma reta r passa pelo ponto (-4, 1) e tem sua direção definida pelo vetor (4, 5). Escreva a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto (1, -2) se a mesma é:

a) paralela a r

b) perpendicular a r.

5) Estude a posição relativa das retas:

a) r: $X = (-1, 0, -1) + \lambda (2, 3, 2)$
   s: $X = (0, 0, 0) + \mu (1, 2, 0)$

b) r: $X = (8, 1, 9) + \lambda (2, -1, 3)$
   s: $X = (3, -4, 4) + \mu (1, -2, 2)$

c) r: $X = (1, -1, 1) + \lambda (-2, 1, -1)$
   s: $X = (3, 3, 0) + \mu (2, -1, 1)$

d) r: $X = (-3, 4, 1) + \lambda (1, 4, 3)$
   s: $X = (0, 2, 2) + \mu (1, 1, -1)$

6) Verifique se as retas são ortogonais:

a) r: $X = (1, 2, 3) + \lambda (1, 2, 1)$
   s: $X = (2, 4, 4) + \mu (-1, 1, -1)$

b) r: $X = (0, 1, 0) + \lambda (3, 1, 4)$
   s: $X = (-1, 1, 0) + \mu (1, 0, 1)$

A RETA NO ESPAÇO R^3

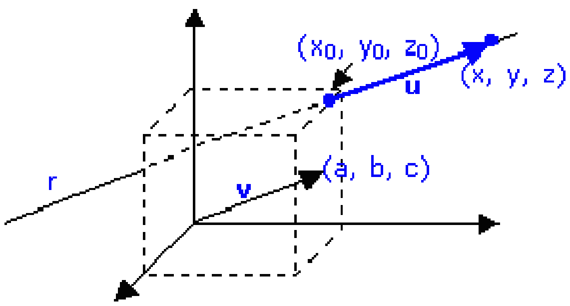
Para o espaço tridimensional são consideradas três coordenadas (x, y, z). A determinação da equação de uma reta nesse espaço tem as mesmas características que a equação da reta no espaço R^2, diferenciando apenas no número de coordenadas.

Sejam então,

a) um ponto (x_0, y_0, z_0) conhecido,

b) o vetor **v** = (a, b, c) paralelo à reta r e

c) (x, y, z) um ponto genérico da reta r, conforme indicados na figura abaixo.



O vetor **u** = $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, por ser paralelo a **v** = (a, b, c), é tal que **u** = λ**v**, o que permite escrever:

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda.(a, b, c) = (a\lambda, b\lambda, c\lambda)$.

Aplicando a definição de igualdade de vetores, conclui-se:

$x - x_0 = a\lambda \Leftrightarrow x = x_0 + a\lambda$; $y - y_0 = b\lambda$ $y = y_0 + b\lambda$ e $z - z_0 = c\lambda$ $z = z_0 + c\lambda$.

As equações:

$$\mathbf{x = x_0 + a\lambda}$$

$$\mathbf{y = y_0 + b\,\lambda}$$

$$\mathbf{z = z_0 + c\lambda,}$$

são denominadas equações paramétricas da reta.

Explicitando λ nas equações pode-se também escrever

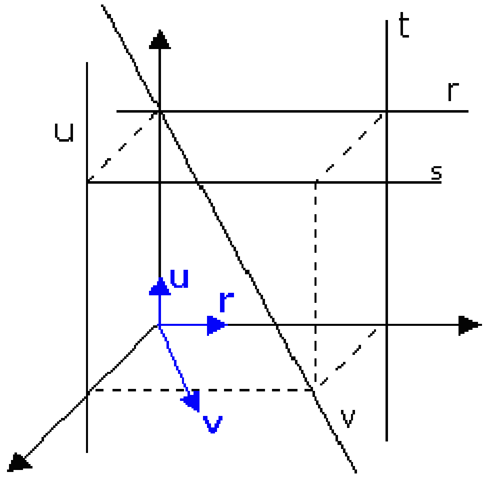
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

que constituem as equações segmentárias da reta.

É importante não esquecer que (a, b, c) é um vetor paralelo à reta enquanto que (x_0, y_0, z_0) é um ponto da reta.

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS EM R3.

A figura a seguir mostra diversas retas no espaço tridimensional, ou seja, em R^3.



Na figura o vetor **u** define as direções de retas como u e t, enquanto que **r** define a direção da reta r.
O vetor **u** é perpendicular ao vetor **v**. Assim, o produto escalar **u**.**v** é nulo. Entretanto, as retas r e u são perpendiculares enquanto que as retas r e t são ortogonais. Para que as retas sejam perpendiculares, além do produto **u**.**v** ser nulo, o sistema formado pelas equações das duas retas deve ter solução única.
No caso de serem ortogonais, não concorrentes, a solução do sistema formado pelas duas retas não deve ter solução.
Para retas paralelas, os vetores que definem suas direções também serão paralelos. Assim, se s e w são os vetores que definem as direções das retas, deve-se ter **s** = k. **w**.
Quando, as retas não são paralelas e o produto escalar dos vetores que definem suas direções não for nulo, as retas serão concorrentes obliquas se o sistema apresentar solução única ou serão reversas oblíquas se o sistema não tiver solução.

EXERCÍCIOS

1 - Escreva a equação da reta cuja direção é definida pelo vetor (2, 1, 2) e que passe pelo ponto (-2, 3, 4).

2 – Escreva, na forma segmentária, a equação da reta que passa pelo ponto (3, 4, 2), paralela à reta:

$$x = 3 + 2\lambda \qquad y = -4 + 7\lambda \qquad z = -5 - 3\lambda.$$

3 – Considere os pares de retas abaixo. Informe a posição de uma em relação à outra.

a) $(x - 3)/2 = (y + 2)/-3 = (z - 5)/4$ e $[x = 4 - 8\lambda ;\ y = 10 + 12\lambda ;\ z = 15 - 16\lambda]$

b) $[x = 1 + 2\lambda ;\ y = 4 + 3\lambda ;\ z = -3 + 4\lambda]$ e $[x = 9 + 3\lambda ;\ y = -7 + 2\lambda ;\ z = 2 - 3\lambda]$

c) $[x = 1 + 2\lambda ;\ y = 4 + 3\lambda ;\ z = -3 + 4\lambda]$ e $[x = 2 + 3\lambda ;\ y = 5 + 2\lambda ;\ z = (-5/3) - 3\lambda]$

4 – Ache o valor de a para que as retas $(x - 3)/2 = (y + 2)/-3 = (z - 5)/4$ e $[x = 1 + 2\lambda ;\ y = 4 + 3\lambda ;\ z = a + 4\lambda]$ sejam concorrentes.

5 - Dê um vetor na forma (20, n, m) que seja paralelo à reta $(x - 2)/4 = (y - 1)/3 = (z + 4)/(-2)$.

6 - Dê um vetor na forma (a, b, 15) que seja paralelo à reta $x = -3 + 4\lambda$, $y = 2 - 3\lambda$, $z = 5 + 2\lambda$.

7 - Dê um ponto que pertença à reta do exercício 05 e outro que pertença à reta do exercício 6.

8 - Determine um vetor na forma (5, 2a - 1, a) que seja perpendicular à reta do exercício 5.

9 - Determine um vetor na forma (2a + 2, 3a, 1), que seja perpendicular à reta do exercício 6.

10 - Determine a equação da reta, nas formas paramétricas e segmentária, que passa pelos pontos (2, 1, 2) e (5, -1, 7).

11 - Verifiquem se o ponto (6, -1, 0) pertence à reta que passa pelos pontos (4, -2, 3) e (5, 1, 5).

12 - Sejam A = (7, -13, 6), B = (4, -4, 5) e C = (9, -19, 2). Entre eles, qual (ou quais) passa (ou passam) pela reta que contém os pontos (3, -1, 2) e (2, 2, 1).

13 - Determine a equação da reta suporte da mediana relativa ao lado AB do triângulo de vértices A = (7, -13, 6), B = (4, -4, 5) e C = (9, -19, 2).