

ÁLGEBRA LINEAR

EMENTA: Matrizes, sistemas lineares e vetores. (+ espaços vetoriais, transformações e operadores lineares)

BIBLIOGRAFIA:

1) STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear e Geometria Analítica**. 1ªed. São Paulo: Pearson, 2009. (PLT - \$119 → \$33,90)

2) WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2000.

3) ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8ªed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

AVALIAÇÃO: 1º Avaliação - PESO 4,0 | 2º Avaliação - PESO 6,0
ATPS (2) + Prova (8) | ATPS (3) + Prova (7)

AULA 01: MATRIZES - PLT-Pág. 222

Chama-se matriz de ordem (ou tipo ou tamanho) $m \times n$, com $m, n \in \mathbb{N}^*$, toda tabela constituída por $m \times n$ elementos, dispostos em m linhas e n colunas. Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×3 . Cada elemento de uma matriz é indicado por a_{ij} onde i é a linha a que ele pertence e j , a coluna.

Exemplo: se A é uma matriz 2×3 , teremos $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ ou $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$.

Classificação: $\begin{cases} \text{matriz quadrada: } m = n \text{ (matriz de ordem } n) \\ \text{matriz retangular: } m \neq n \\ \text{matriz linha: } m = 1 \\ \text{matriz coluna: } n = 1 \end{cases}$

Duas matrizes A e B são iguais se, e somente se, são de mesma ordem se $a_{ij} = b_{ij} \forall i, j$.

Exemplo: $\begin{bmatrix} a & b \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ se, e somente se, $a = 8$ e $b = 9$.

A matriz oposta de A , indicada por $(-A)$, é obtida trocando-se cada elemento de A pelo seu oposto.

Exemplo: se $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, então $(-A) = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

A transposta de uma matriz A , indicada por A^T , é obtida trocando-se ordenadamente as linhas por colunas.

Exemplo: se $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, a sua transposta é $A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Matrizes especiais:

1) Matriz nula (ou zero) $[0]_{m \times n}$: todos os elementos são nulos. Ex: $0_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2) Matriz identidade (ou unidade) I_n : 1 na diagonal principal e 0 nas outras posições. Ex: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3) Matriz diagonal: zeros fora da diagonal principal. Ex: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

4) Matriz triangular: Ex: $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ (triangular superior) ou $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ (triangular inferior)

OPERAÇÕES COM MATRIZES

1) Adição e subtração: Se $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ então $A \pm B = C = [c_{ij}]_{n \times m}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ então $A + B = \begin{bmatrix} 3+1 & 7-3 \\ -2+0 & 5+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ e

$$A - B = \begin{bmatrix} 3-1 & 7+3 \\ -2-0 & 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Para quaisquer matrizes A, B e C de mesmo tipo $n \times m$, temos:

- 1) $A + B = B + A$ (Comutativa)
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associativa)
- 3) $A + O_{n \times m} = O_{n \times m} + A = A$ (Elemento neutro)
- 4) $A + (-A) = (-A) + A = O_{n \times m}$ (Elemento oposto)

2) Multiplicação por um número real α : $\alpha \times A_{n \times m} = [\alpha \cdot a_{ij}]_{n \times m}$

Exemplo: $3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 15 \\ -12 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

Propriedades: Para quaisquer matriz A e para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valem:

- 1) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- 2) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- 3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- 4) $1A = A$

3) Multiplicação de matrizes: O produto das matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ e $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ é a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, onde cada elemento c_{ij} é obtido pela soma dos produtos dos elementos da i -ésima linha de A pelos elementos da j -ésima coluna de B , isto é, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

Atenção para a condição de existência do produto!!

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ então

$$C_{3 \times 2} = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1.1 + 3.(-1) & 1.2 + 3.0 \\ 0.1 + 4.(-1) & 0.2 + 4.0 \\ 2.1 + 1.(-1) & 2.2 + 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Dadas as matrizes $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$ e $C_{p \times r}$ tem-se:

- | | |
|-----------------------|---|
| 1) $(AB)C = A(BC)$ | 4) $IA = A$ |
| 2) $(A+B)C = AC + BC$ | 5) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ |
| 3) $C(A+B) = CA + CB$ | 6) $0A = A0 = 0$ |

4) Potência n de uma matriz: $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$. Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ então

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS

1. Calcular os valores de m e n para que as matrizes A e B sejam iguais.

(a) $A = \begin{bmatrix} 8 & 15n \\ 12+m & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 8 & 75 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} m^2 - 40 & n^2 + 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 41 & 13 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, calcular:

(a) $A + B$ (b) $B - C$ (c) $X = 2B - 3A - 6C$

3. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, obter AB .

4. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, determinar AB , $(BC)^T$ e $A(BC)$.

Notação: $\det A, |A|$ ou $\det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ ou $\left\| \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \right\|$.

Cálculo de determinantes de uma matriz

• de ordem 1: $|a_{11}| = a_{11}$ Exemplos: $|1| = 1$ e $|-1| = -1$

• de ordem 2: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11$

• de ordem 3 (Regra de Sarrus) Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 4 \end{array}$$

$$-(-10) - 36 - 0 + 40 + 0 + 8 = 20$$

Propriedades

(1) $\det = 0$ se $\begin{cases} \text{fila nula} \\ \text{filas iguais ou proporcionais} \\ F_i = F_j + \alpha F_k \end{cases}$ (2) troca de filas $\Rightarrow$ troca de sinal do determinante

(3) Fila $\times k \Rightarrow \det \times k$

(4) $\det A = \det A^T$

(5) $[\backslash]$ ou $[\Delta] \Rightarrow \det = \Pi$ diagonal

(6) $\begin{vmatrix} a & b+c \\ d & e+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$

(7) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (Teorema de Binet)

Exercício 1 Por qual razão os determinantes abaixo são nulos?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & \sqrt{5} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & \sqrt{5} \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix}$

Exercício 2 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule:

a) $\det A$ b) $\det A^T$ c) $\det B$ d) $\det(AB)$ e) $\det \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Exercício 3 Calcule: a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

Exercício 4 Resolva: a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2x & x & 3x \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 39$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & x \\ 5 & 2 & -x \\ 7 & 4 & 2x \end{vmatrix} = -128$

Determinantes de matrizes de ordem arbitrária

Cofator de um elemento a_{ij} da matriz A é definido por $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$, onde A_{ij} é a matriz A sem linha i e coluna j .

Exemplo 1 Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se $c_{32} = (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 1 + 1 - 1) = -2$

$$c_{34} = (-1)^{3+4} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(1 + 1 - 1 + 1) = -2, \text{ etc}$$

Teorema de Laplace $\det A = \sum_{\text{fila}} a_{ij} \times c_{ij}$ Sugestão: Escolher uma fila que tem mais 0.

Exemplo 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times c_{32} + 3 \times c_{34} = 2(-2) + 3(-2) = -4 - 6 = -10$

Exercício 5 Calcular (Laplace):

$a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$c) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n . A matriz B é a inversa da matriz A , se e somente se, $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Neste caso, dizemos que A é invertível e escrevemos $B = A^{-1}$. A inversa de uma matriz, se existir, é única.

Exemplo 3 $A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \Rightarrow B = A^{-1}$

OBS: Se $A \cdot B = I$, não precisamos verificar a condição $B \cdot A = I$ porque a igualdade estará automaticamente satisfeita.

A é singular ou não-invertível se A não possuir inversa. Uma matriz A é invertível somente quando $\det A \neq 0$.

Propriedades:	1) $(I_n)^{-1} = I_n$ 2) $(A^{-1})^{-1} = A$ 3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ 4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
----------------------	--

Equações matriciais são equações que envolvem matrizes. Elas podem ser resolvidas utilizando a matriz inversa.

Exemplo 4 Dadas as matrizes quadradas A , B e C , de mesma ordem e invertíveis, resolver as equações matriciais nas quais X é variável:

1. $ABX = C \Rightarrow A^{-1}ABX = A^{-1}C \Rightarrow B^{-1}BX = B^{-1}A^{-1}C \Rightarrow \boxed{X = B^{-1}A^{-1}C}$

2. $CAX^T = C \Rightarrow C^{-1}CAX^T = C^{-1}C \Rightarrow AX^T = I \Rightarrow A^{-1}AX^T = A^{-1}I \Rightarrow X^T = A^{-1} \Rightarrow \boxed{X = (A^{-1})^T}$

3. $AX^2C = AXBC \Rightarrow A^{-1}AX^2C = A^{-1}AXBC \Rightarrow X^2C = XBC \Rightarrow XXC = XBC \Rightarrow$
 $X^{-1}XXC = X^{-1}XBC \Rightarrow XCC^{-1} = BCC^{-1} \Rightarrow \boxed{X = B}$

Exercício 6 As matrizes dadas são invertíveis? a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

As operações elementares com as linhas das matrizes são:

- 1) Trocar duas linhas $[L_{ij}] \quad (i \neq j)$
- 2) Multiplicar uma linha por $k \ (k \neq 0) \quad [L_i(k)]$
- 3) Somar um múltiplo de uma linha com outra $[L_i + L_j(k)]$

Exemplo 5 Calcular a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{L_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 & 1 \\ 2 & 1 & | & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 + L_1(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 & 1 \\ 0 & -1 & | & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 = L_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 & 1 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2(-1)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_2} \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right| \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6 $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}}_B \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{L_1 = L_1(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & -5/2 & | & 1/2 & 0 \\ -3 & 8 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 + L_1(3)} \begin{bmatrix} 1 & -5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & | & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{L_2 = L_2(2)} \begin{bmatrix} 1 & -5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & | & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2(5/2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 8 & 5 \\ 0 & 1 & | & 3 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\hspace{1cm}}_{B^{-1}}$$

Exemplo 7 $\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}}_C \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{L_1 = L_1/3} \begin{bmatrix} 1 & -4/3 & 5/3 & | & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 + L_1(-3)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4/3 & 5/3 & | & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 + L_2]{L_1 = L_1 + L_2(4/3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13/3 & | & -1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 = L_2 + L_3(-2)]{L_1 = L_1 + L_3(-13/3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -14/3 & -3 & -13/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\hspace{1cm}}_{C^{-1}}$$

Exercício 7 Calcular a inversa de cada uma das matrizes dadas utilizando as operações elementares.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$