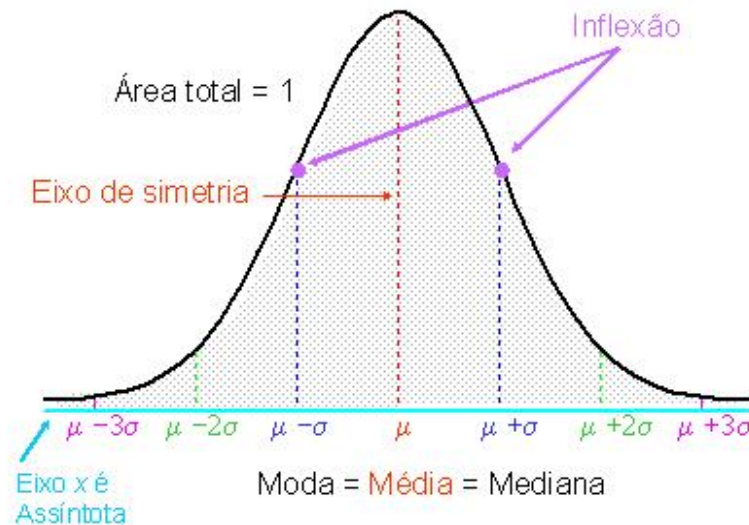


AULA 09 - ESTATÍSTICA - DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE PROBABILIDADES

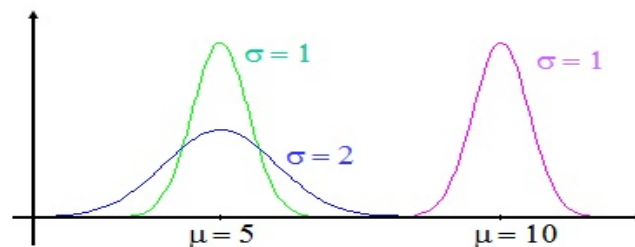
A distribuição normal de probabilidades é uma distribuição teórica cujo gráfico é o da função

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

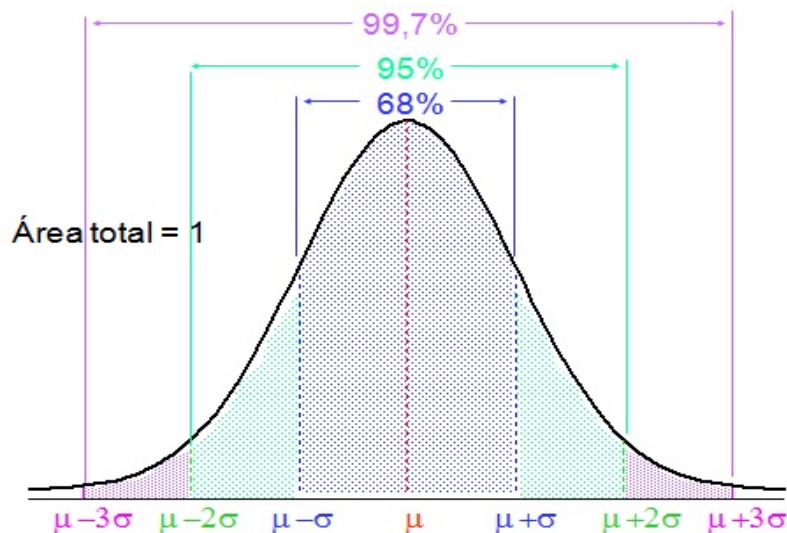
Ela é uma distribuição contínua, isto é, x pode assumir quaisquer valores reais desde $-\infty$ até $+\infty$. Todas as Curvas Normais (ou Curva de Gauss ou curvas em forma de sino) têm o seguinte aspecto e características:



Para cada par de números μ (média) e σ (desvio-padrão) temos uma curva normal diferente. Portanto, existem infinitas curvas normais.



A área total limitada pela curva normal e pelo eixo Ox é igual a 1 ($0,5 + 0,5$), que identificamos com probabilidade de 100%. A área sob a curva delimitada pelos valores $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ é 0,6826. Isto significa que a probabilidade desta variável assumir valores entre $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ é de 68,26%.



Apesar de teórico, este tipo de distribuição é importante pois muitas variáveis na natureza, por exemplo, variáveis físicas (desgaste do piso), biológicas (estatura, peso, pressão sanguínea), psicológicas (QI, tempo de reação, rapidez de associação, resultados de testes educacionais) ou sociais (salários, taxa de nascimentos, casamentos e mortes) comportam-se de modo aproximadamente simétrico ao redor da média, podendo ser bem representadas pela Distribuição Normal.

Notação 1 Quando uma variável X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 indicaremos $X : N(\mu, \sigma^2)$. Quando uma variável X se aproxima da distribuição normal indicaremos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Definição 1 A distribuição normal que possui média 0 ($\mu = 0$) e desvio-padrão 1 ($\sigma = 1$) é chamada Distribuição Normal Padrão (ou Reduzida) e indicada por $Z(0, 1)$.

Utilização das tabelas: A tabela da distribuição normal padrão Tabela I (vide anexo) fornece probabilidades da forma $P(0 \leq Z \leq z)$. Nas distribuições normais que não sejam padrão ($\mu \neq 0$ ou $\sigma \neq 1$), há necessidade de convertê-la inicialmente para a normal padrão. Esta transformação é denominada **padronização** e é feita através da fórmula

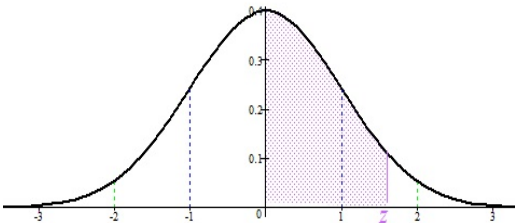
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Exemplo 1 Suponha que as medidas da corrente (X) em um pedaço de fio sigam a distribuição normal com média (μ) de 10 miliampères e uma variância (σ^2) de 4 (miliampères)². Qual a probabilidade da medida exceder 13 miliampères?

$$P(X > 13) = P\left(z > \frac{13 - 10}{2}\right) = P(z > 1,5).$$

Pela Tabela I, a área de 0 a 1,5 é igual a 0,4332. Logo, $P(z > 1,5) = 0,5 - 0,4332 = 0,0668 = 6,68\%$.

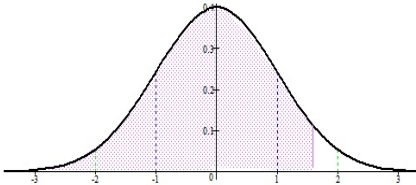
(Parte da Tabela I)



<i>z</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	...
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	...
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	...
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	...
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	...
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	...
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...

Se preferir, a Tabela II pode ser utilizada:

(Parte da Tabela II)



<i>z</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	...
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	...
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	...
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	...
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	...
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	...
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...

$$P(z > 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

OBS 1

O exemplo a seguir será desenvolvido utilizando-se a Tabela I.

Exemplo 2 Na mesma situação do exemplo prévio, qual a probabilidade da medida estar entre:

a) 9 e 11 mA?

$$P(9 \leq X \leq 11) = P\left(\frac{9 - 10}{2} \leq z \leq \frac{11 - 10}{2}\right) = P(-0,5 \leq z \leq 0,5) = 2 \times 0,1915 = 0,383$$

b) 10,5 e 13 mA?

$$P(10,5 \leq X \leq 13) = P\left(\frac{10,5 - 10}{2} \leq z \leq \frac{13 - 10}{2}\right) = P(0,25 \leq z \leq 1,5) = 0,4332 - 0,0987 = 0,3345$$

EXERCÍCIO 1 Seja Z uma distribuição normal padrão. Calcule as seguintes probabilidades:

a) $P(Z < 1,32)$

b) $P(Z > 1,45)$

c) $P(Z > -2,15)$

d) $P(-2,34 < Z < 1,76)$

EXERCÍCIO 2 Suponha que Z seja uma distribuição normal padrão. Determinar o valor de z que resolve cada um dos itens a seguir:

a) $P(Z < z) = 0,9$

b) $P(Z > z) = 0,1$

c) $P(-1,24 < Z < z) = 0,75$

d) $P(-z < Z < z) = 0,95$

EXERCÍCIO 3 A resistência das vigas de madeira utilizadas na construção civil está sendo estudada. O fornecedor atesta que em média cada viga resiste a 3 toneladas com um desvio-padrão de aproximadamente 1 tonelada. Considerando verdadeira a informação do fornecedor e supondo que o modelo Normal é adequado, qual a probabilidade de uma dessas vigas suportar menos do que 1 tonelada?

EXERCÍCIO 4 Suponha que os prazos de substituição de aparelhos de TV têm distribuição normal com média de 8,2 anos e desvio-padrão de 1,1 ano. Determine a probabilidade de um aparelho de TV selecionado aleatoriamente ter um prazo de substituição inferior a 8,0 anos.

EXERCÍCIO 5 A durabilidade de um tipo de pneus de uma marca é descrita por uma variável normal com média igual a 60.000 km e desvio-padrão de 8.300 km.

a) Se o fabricante garante os pneus pelos primeiros 48.000 km, qual a probabilidade de um pneu, escolhido aleatoriamente, ser trocado sob garantia?

b) Qual deveria ser a garantia (em km) de forma a assegurar que o fabricante trocaria sob garantia no máximo 2% dos pneus?

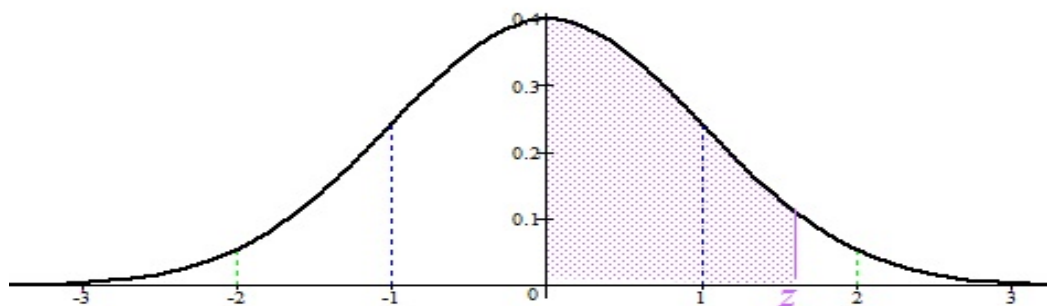
EXERCÍCIO 6 O tempo de reação de um motorista para o estímulo visual é normalmente distribuída com uma média de 0,4 segundos e um desvio-padrão de 0,05 segundos.

a) Qual é a probabilidade de que uma reação requeira mais de 0,5 s?

b) Qual é a probabilidade de que uma reação requeira entre 0,4 s e 0,5 s?

c) Qual é o tempo de reação que é excedido em 90% do tempo?

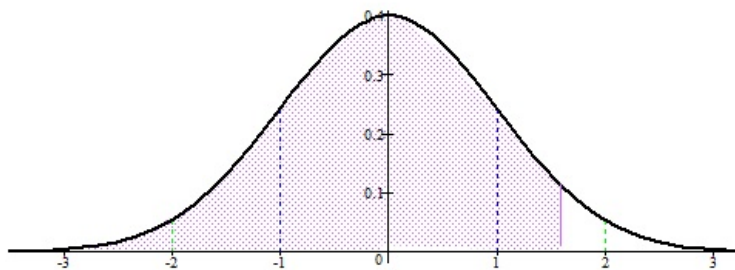
TABELA I - Distribuição Normal - Área sob a curva da distribuição normal padrão (de 0 a z)



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

OBS: O valor de cada célula pode ser obtida utilizando-se a função **DIST.NORMP(z)-0,5** do programa Excel.

TABELA II - Distribuição Normal - Área sob a curva da distribuição normal padrão (até z)



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

OBS: O valor de cada célula pode ser obtida utilizando-se a função **DIST.NORMP(z)** do programa Excel.