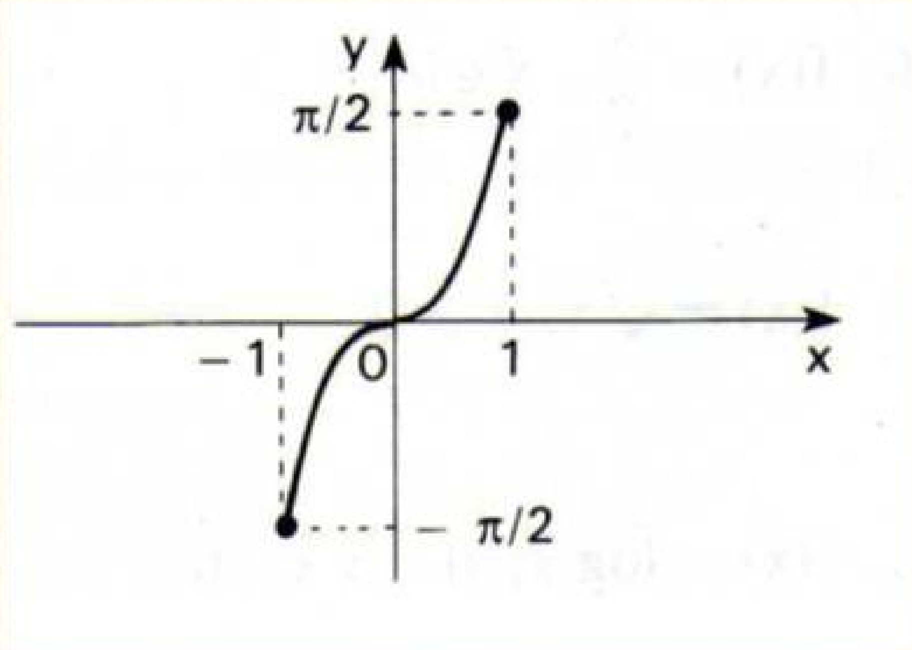
13. A função y = arc sen x, $-1 \le x \le 1$, tem:



a) mínimo absoluto em $x = -1$;

b) máximo absoluto em $x = 1$;

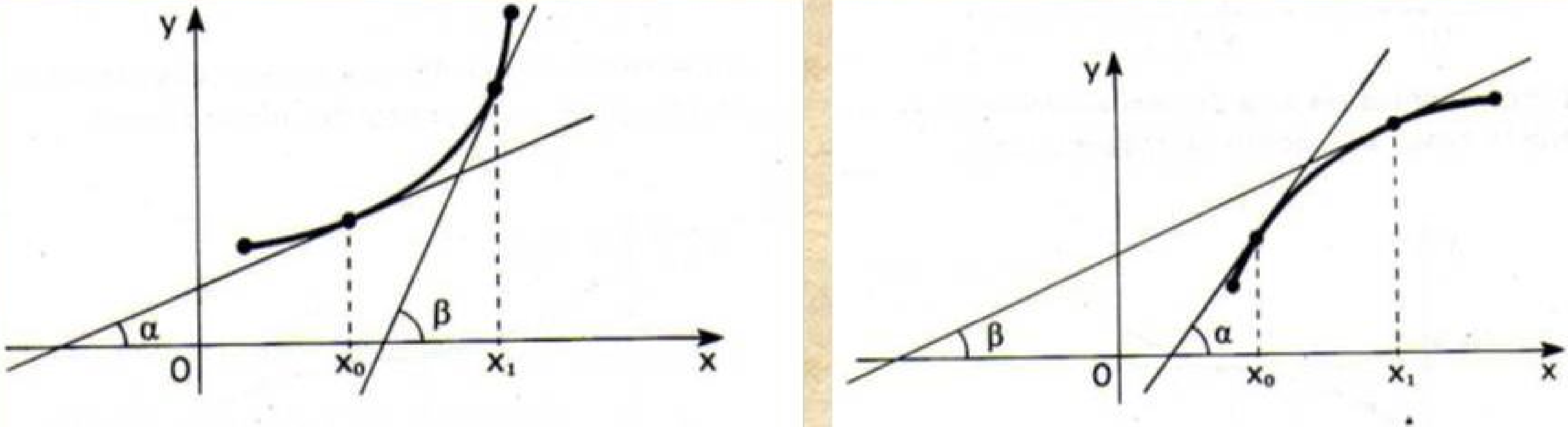
c) valor mínimo $f(-1) = \text{arc sen}\,(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$;

d) valor máximo $f(1) = \text{arc sen}\,1 = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Os sinais da Derivada primeira

Consideremos uma função real f definida num domínio D, tal que f é derivável em D. Os sinas da função derivada f´ estão relacionados ao crescimento ou decrescimento de f. Valem as seguintes propriedades.

(I) Se f´(x) é positiva para todo x de um intervalo I, então f é crescente em I.

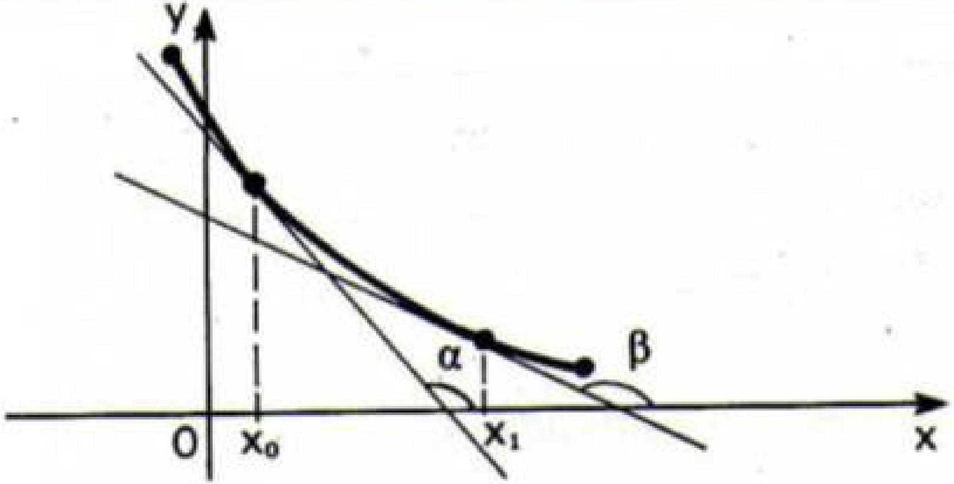


$f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha > 0$ $\quad$ $f'(x_1) = \text{tg}\,\beta > 0$

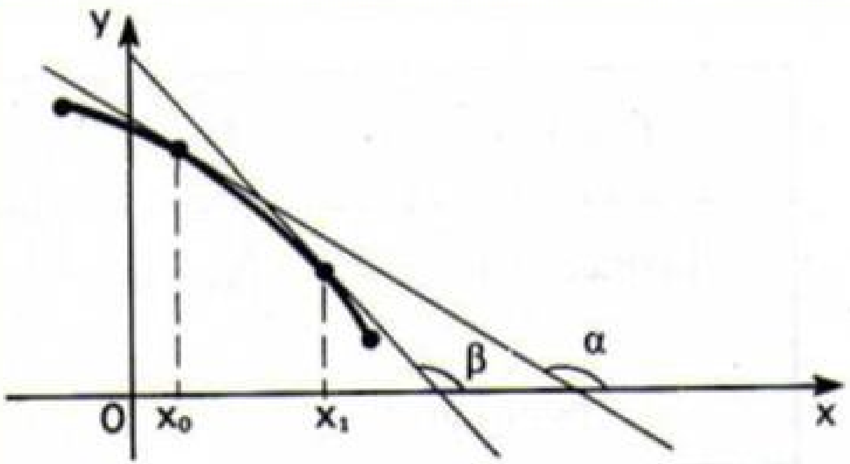
$f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha > 0$ $\quad$ $f'(x_1) = \text{tg}\,\beta > 0$

$$\boxed{f'(x) > 0,\ \forall x \in I \Rightarrow f \text{ crescente em } I}$$

(II) Se $f'(x)$ é negativa para todo x de um intervalo I, então f é decrescente em I.



$f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha < 0$, $f'(x_1) = \text{tg}\,\beta < 0$



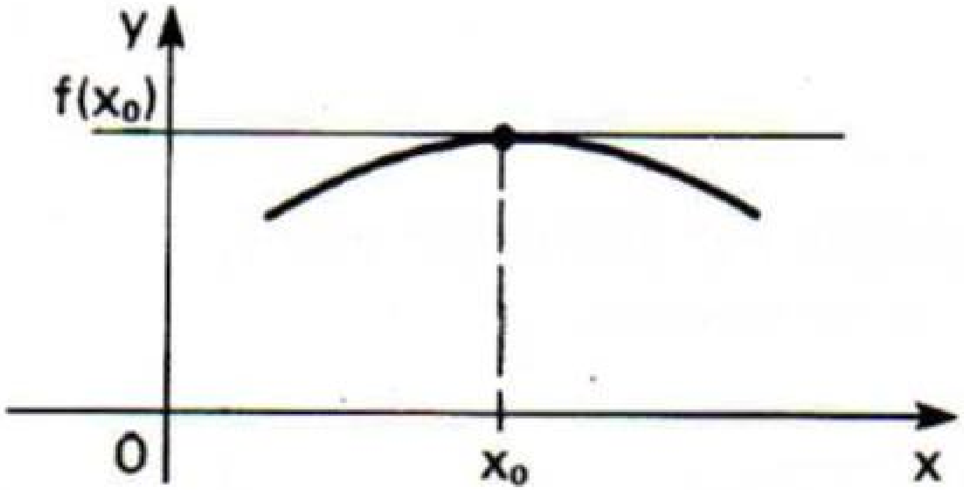
$f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha < 0$, $f'(x_1) = \text{tg}\,\beta < 0$

$$\boxed{f'(x) < 0,\ \forall x \in I \Rightarrow f \text{ decrescente em } I}$$

Agora suponhamos que f seja derivável num intervalo aberto contendo o ponto x_o e que $f'(x_o) = 0$.

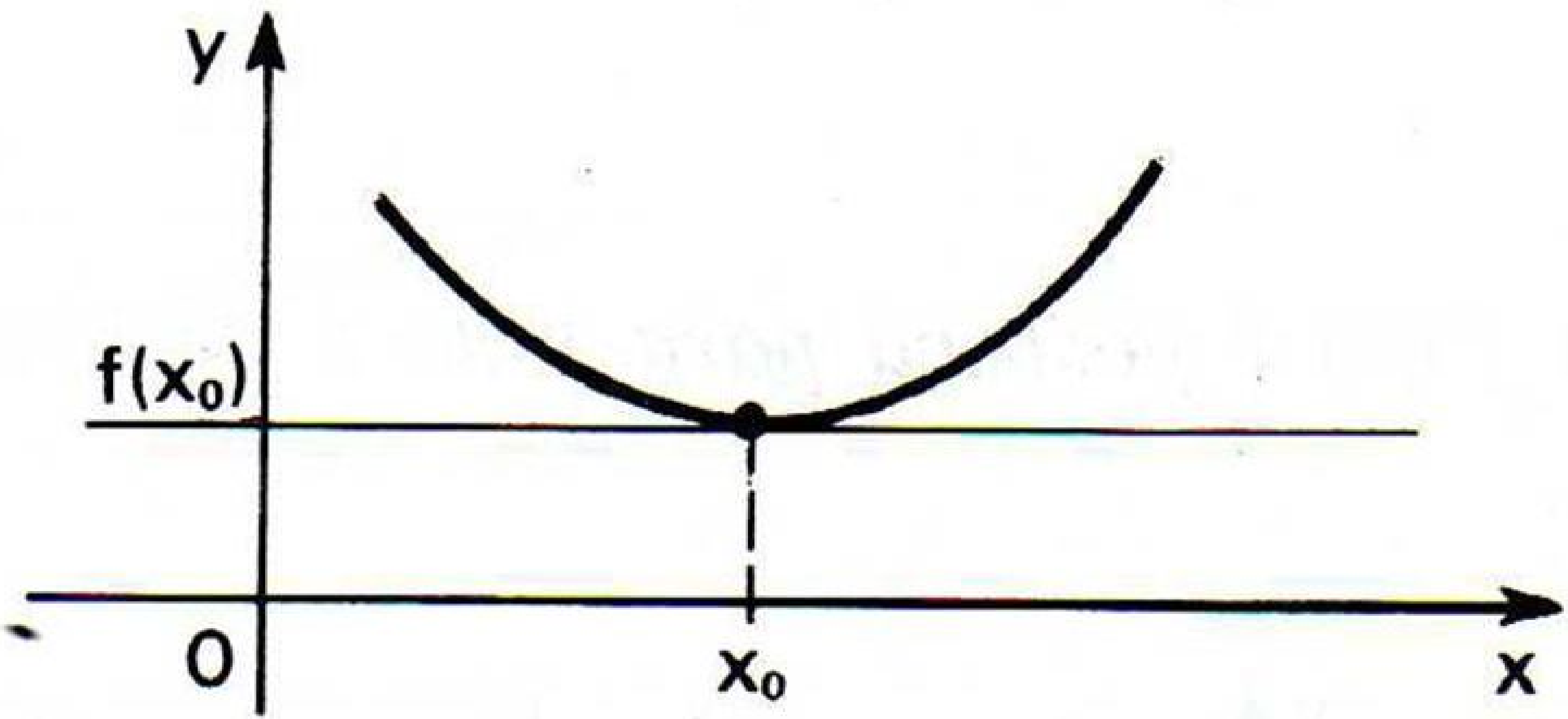
A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_o tem coeficiente angular $m = f'(x_o) = 0$; portanto, é paralela ao eixo x. Isto pode ocorrer nas seguintes situações.

a)



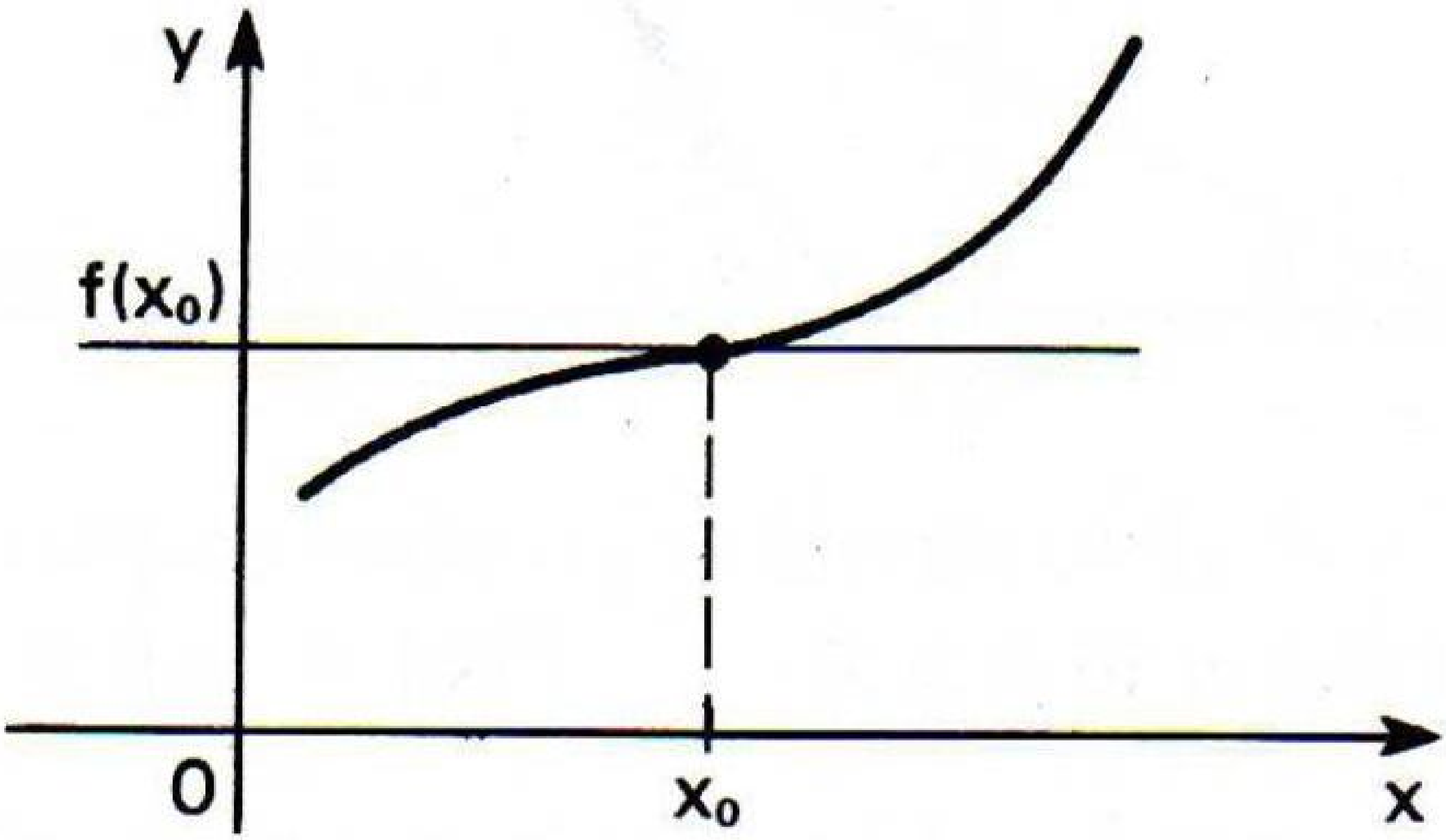
f cresce antes de x_0 e decresce depois de x_0.
Neste caso, x_0 é ponto de máximo local.

b)



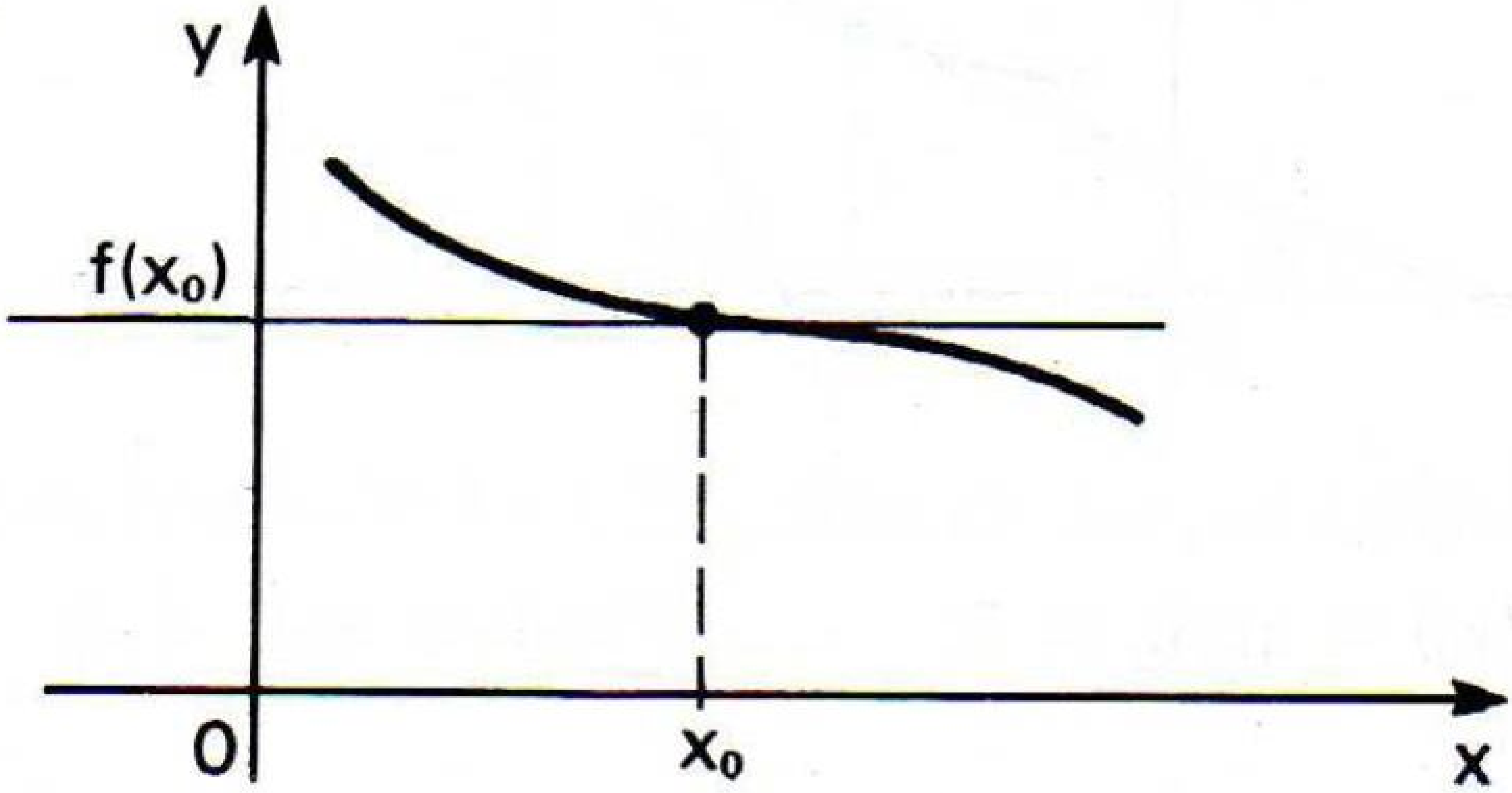
f decresce antes de x_0 e cresce depois de x_0.
Neste caso, x_0 é ponto de mínimo local.

c)



f cresce antes e depois de x_0.
Neste caso, diz-se que x_0 é um *ponto de inflexão* de f.

d)



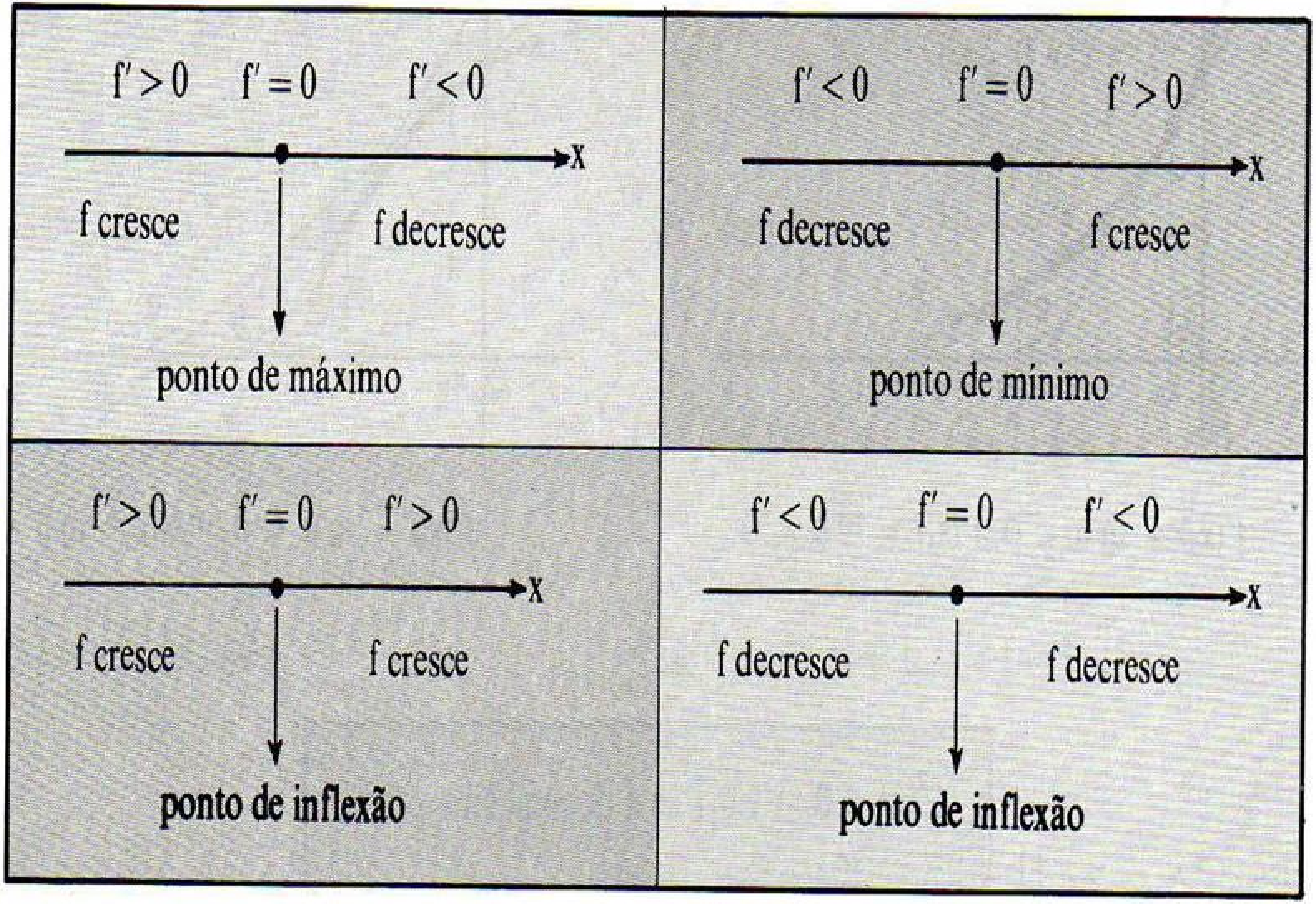
f decresce antes e depois de x_0.
Neste caso, x_0 é *ponto de inflexão.*

Concluindo, observamos que, quando temos uma função derivável, podemos descobrir os intervalos onde f cresce ou decresce e ainda determinar eventuais pontos de máximos ou de mínimos achando as raízes e analisando os sinais da derivada f´.

Num intervalo em que $f'(x) > 0$, f é crescente.

Num intervalo em que $f'(x) < 0$, f é decrescente.

Os pontos em que $f'(x) = 0$ podem ser de máximo ou de mínimo ou de inflexão. Estes pontos são chamados **pontos críticos de f.**



f' > 0 f' = 0 f' < 0
x
f cresce
f decresce
ponto de máximo
f' < 0 f' = 0 f' > 0
x
f decresce
f cresce
ponto de mínimo
f' > 0 f' = 0 f' > 0
x
f cresce
f cresce
ponto de inflexão
f' < 0 f' = 0 f' < 0
x
f decresce
f decresce
ponto de inflexão

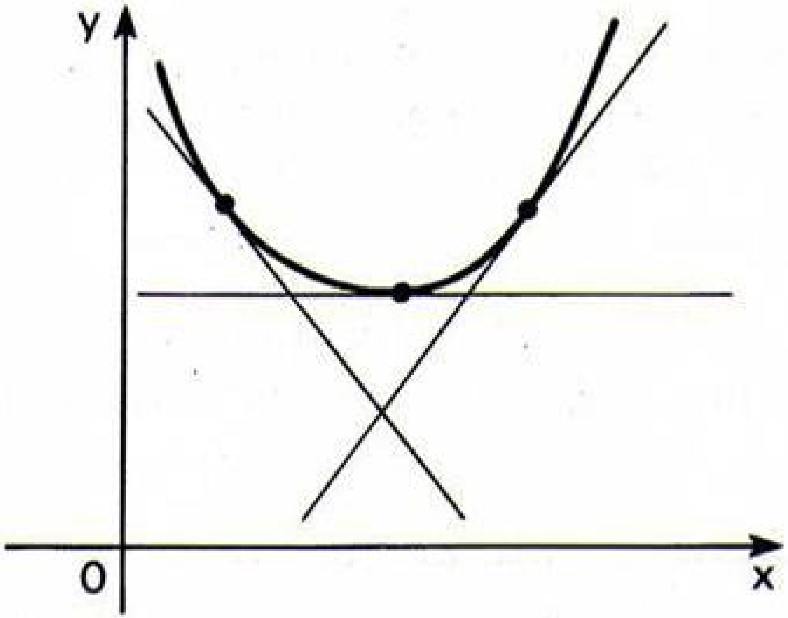
3. Os sinais da Derivada segunda

Consideremos uma função real f, definida num domínio D, tal que f é derivável até segunda ordem em D, isto é, existem f´(x) e f ”(x) em D. Os sinais da derivada segunda f “(x) estão relacionados à concavidade do gráfico de f.

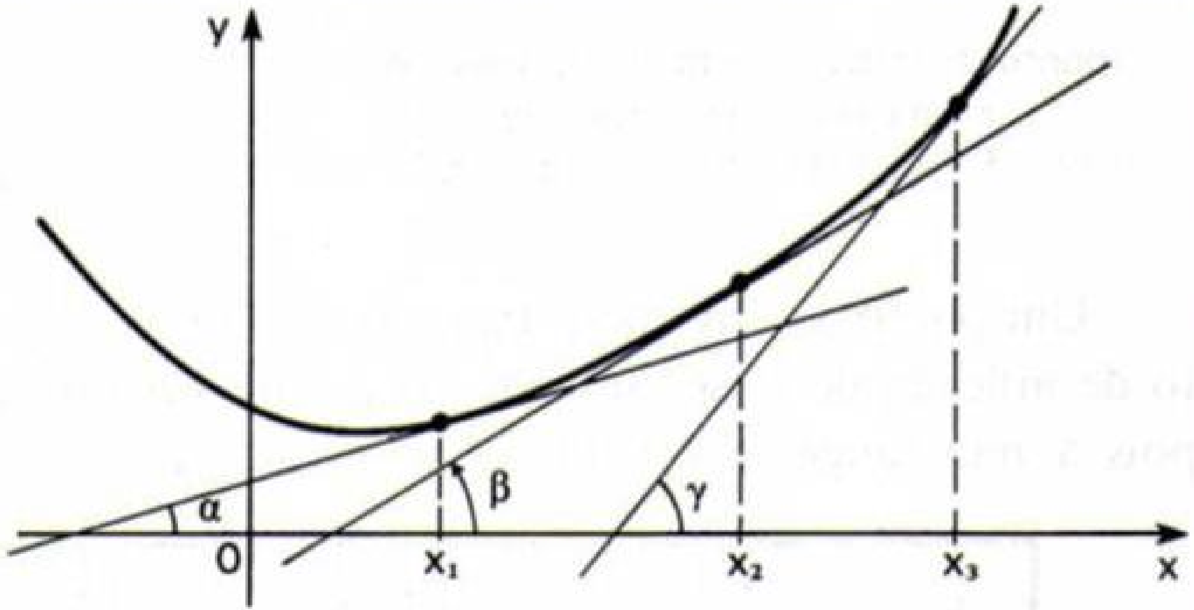
Dizemos que o gráfico de f tem **concavidade para cima** (ou **concavidade positiva**) num intervalo I quando as retas tanges ao gráfico em pontos deste intervalo deixam os pontos acima da curva acima delas.

Vale a seguinte propriedade:

(I) Se f "(x) é positiva para todo x de um intervalo I, então f é côncava para cima em I.



concavidade para cima:
pontos do gráfico ficam acima
das retas tangentes

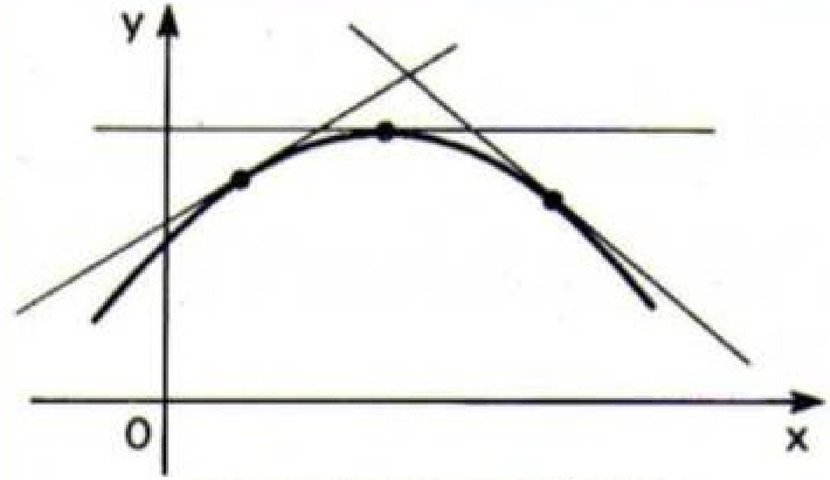


$\text{tg}\,\alpha < \text{tg}\,\beta < \text{tg}\,\gamma$
$f'(x_1) < f'(x_2) < f'(x_3)$
$f'(x)$ é crescente
$f''(x) > 0$

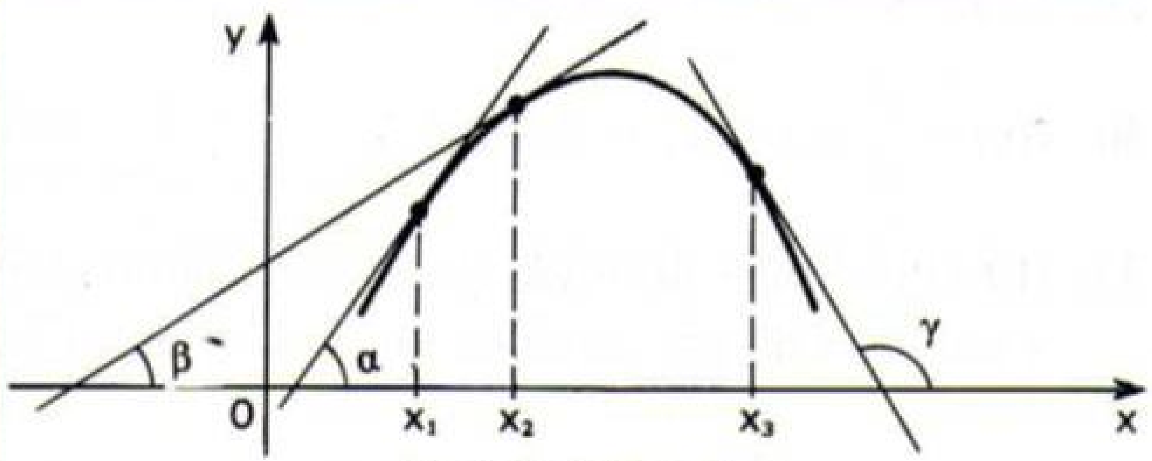
$$\boxed{f''(x) > 0,\ \forall x \in I \Rightarrow \text{ f côncava para cima em I}}$$

Dizemos que o gráfico de f tem **concavidade para baixo** (ou **concavidade negativa**) num intervalo I quando as retas tanges ao gráfico em pontos de I deixam os pontos da curva abaixo delas. Vale a seguinte propriedade:

(II) Se f “(x) é negativa para todo x de um intervalo I, então f é côncava para baixo em I.



concavidade para baixo:
pontos do gráfico ficam abaixo
das retas tangentes



$\text{tg}\,\alpha > \text{tg}\,\beta > \text{tg}\,\gamma$

$f'(x_1) > f'(x_2) > f'(x_3)$

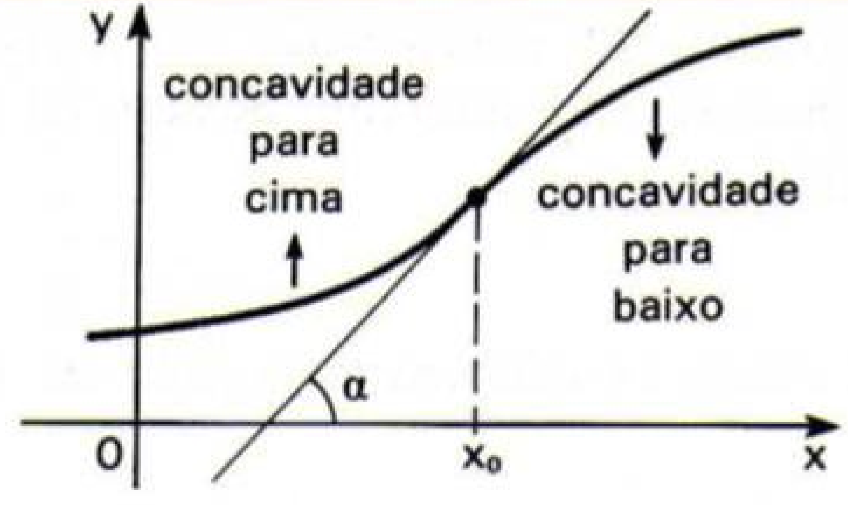
$f'(x)$ é decrescente

$f''(x) < 0$

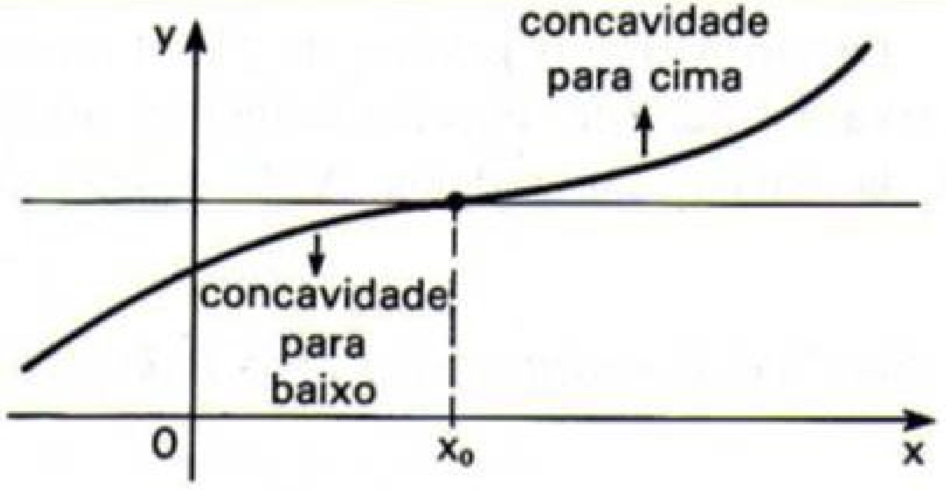
$$\boxed{f''(x) < 0,\ \forall x \in I \Rightarrow f \text{ côncava para baixo em } I}$$

Os pontos em que f muda de concavidade são chamados **pontos de inflexão.**

Num ponto de inflexão, a reta tangente ao gráfico corta a curva.

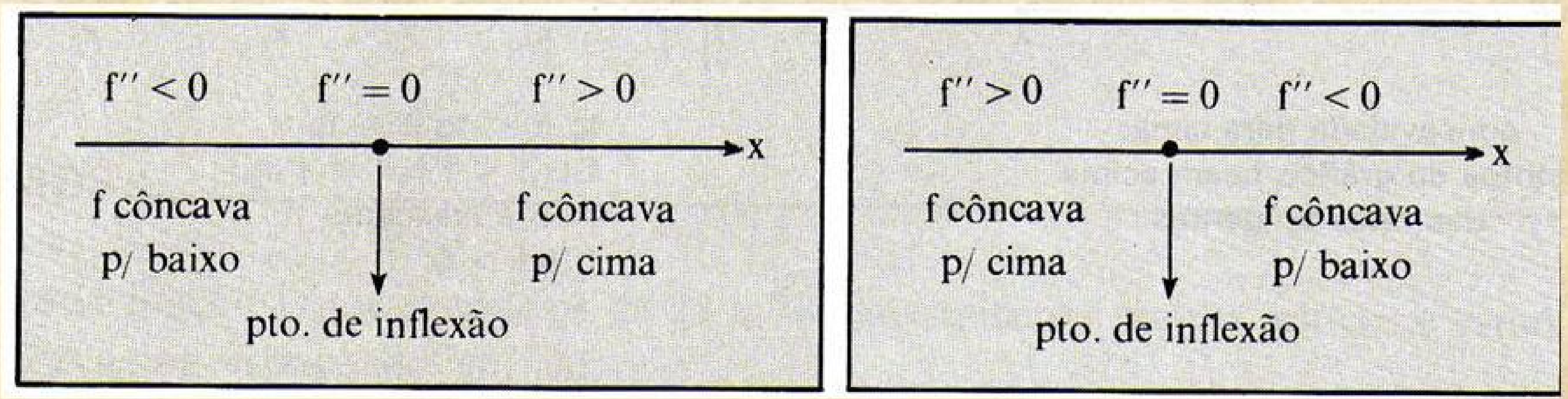


ponto de inflexão: f muda de concavidade
a reta tangente corta o gráfico
$f''(x_0) = 0$ e $f'(x_0) = \text{tg}\ \alpha \neq 0$



ponto de inflexão horizontal:
a reta tangente é paralela ao eixo x
$f''(x_0) = 0$ e $f'(x_0) = 0$

Um ponto x_0 em que f "(x_0) = 0 e f " muda de sinal (antes e depois de x_0) é um ponto de inflexão de f. Se também $f'(x_0) = 0$, dizemos que é um **ponto de inflexão horizontal,** pois a reta tangente é paralela ao eixo x.



Se f "(x_o) = 0 mas f " não muda de sinal (antes e depois de x_o), então f não muda de concavidade em $x_{o;}$ portanto, neste caso, x_o não é ponto de inflexão.

Bibliografia

Machado, Antônio dos Santos. *Funções e Derivadas.* 18. ed. São Paulo: Atual, 1988.

"Jamais considere seus estudos como uma obrigação,

mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito,

para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer."

Albert Einstein

“A maioria dos homens e mulheres, por nascimento ou natureza,

não tem os meios para progredir na riqueza e no poder,

mas todos têm a capacidade de progredir no conhecimento.”

Pitágoras

www.matematicasemmedo.com

Uniban

Universidade Bandeirante Anhanguera

Cálculo Diferencial e Integral

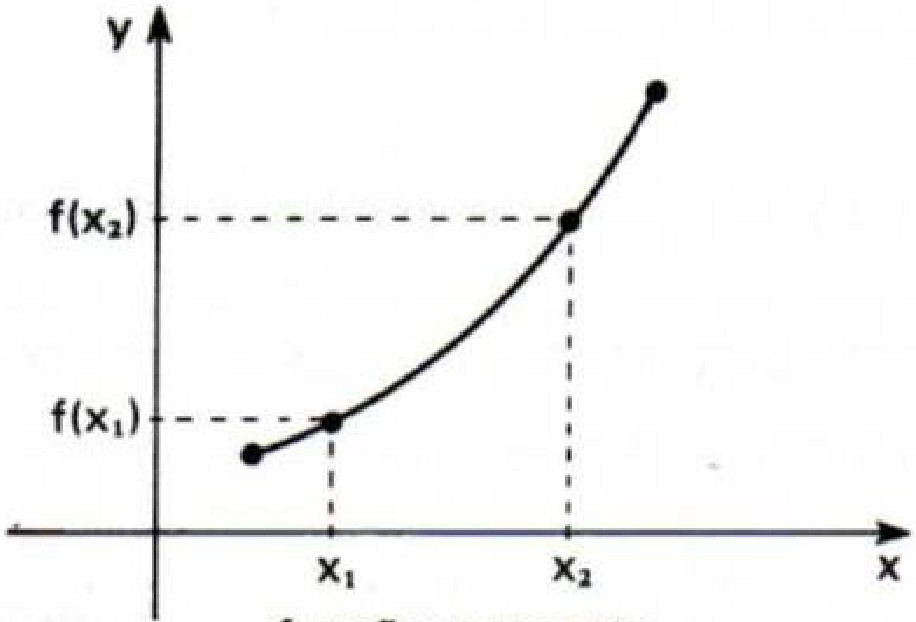
Prof. Cícero

São Paulo – 2013

1. Variação de uma função

Função crescente e função decrescente num intervalo

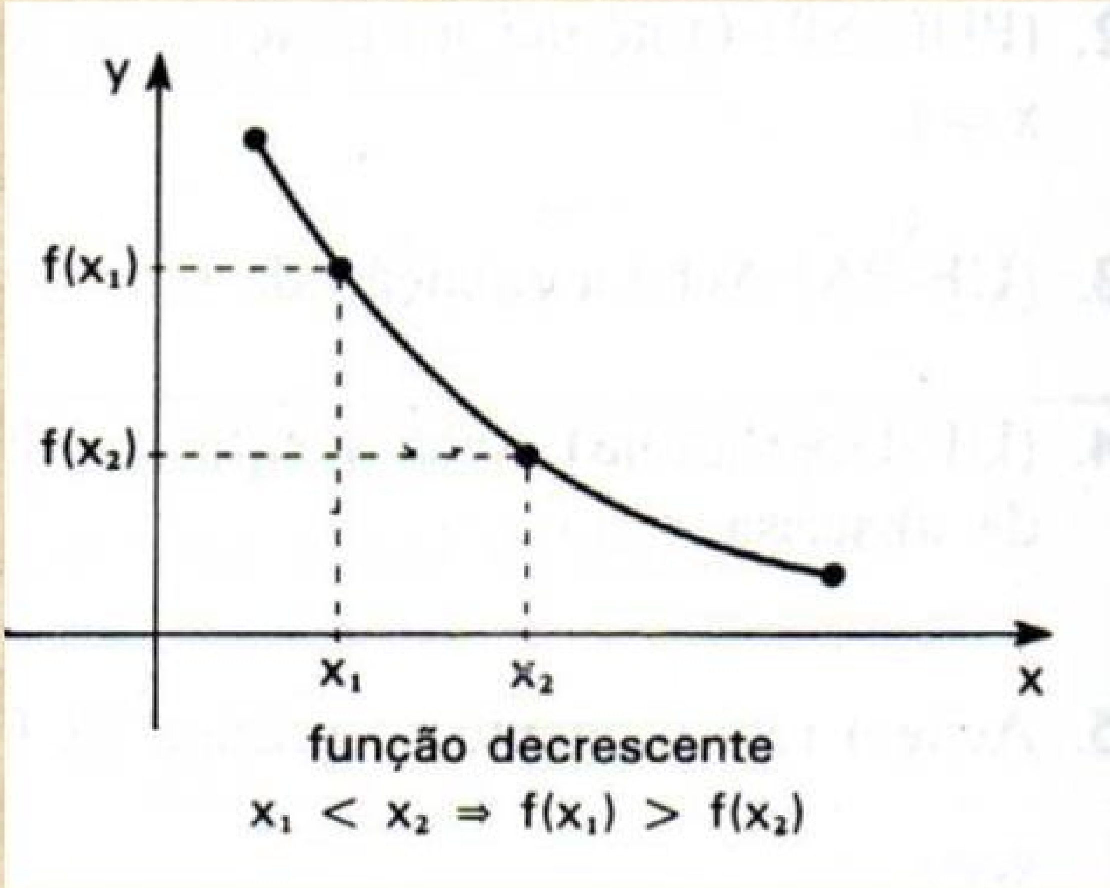
Uma função real f é **crescente num intervalo I** quando aumentando os valores de x, x ϵ I, em correspondência também vão aumentando os valores de f(x).



função crescente

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

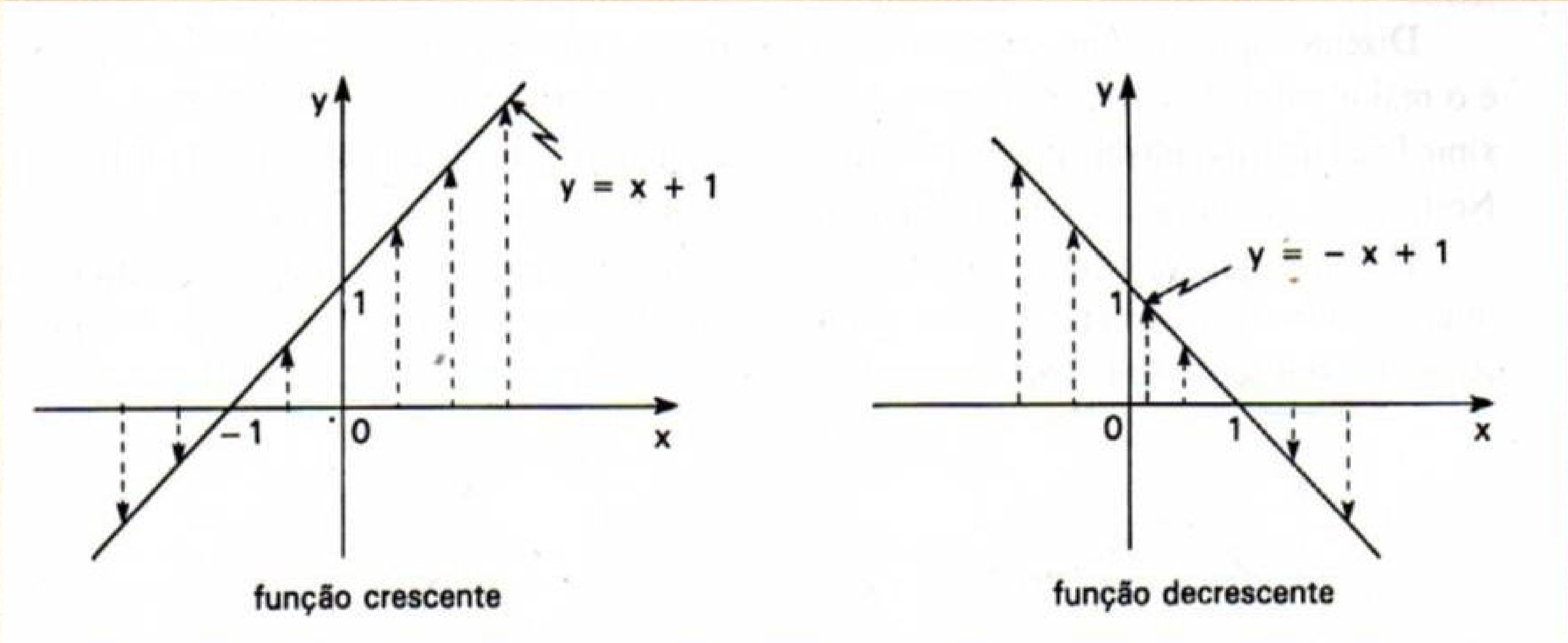
A função é **decrescente em I** quando aumentando os valores de x, x ϵ I, vão diminuindo os valores de f(x).



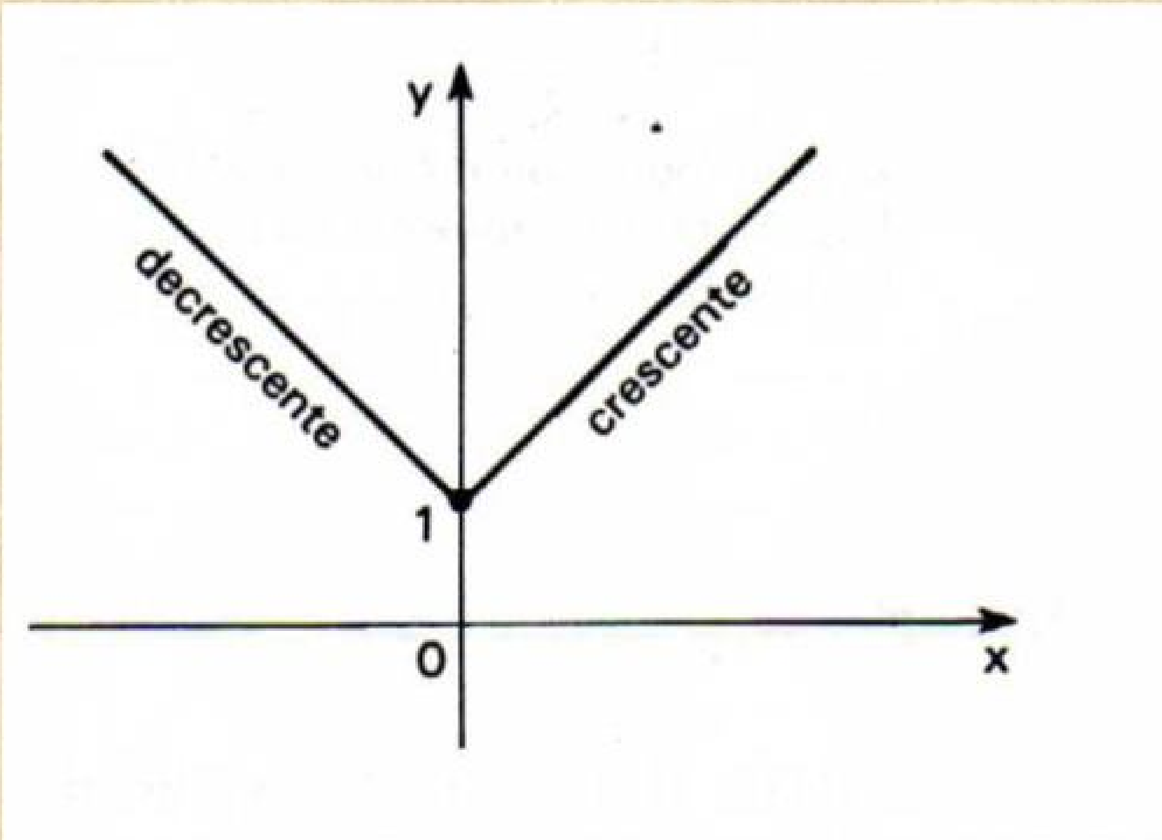
Uma função é chamada **função crescente** quando é crescente no seu domínio todo. Uma função é chamada **função decrescente** quando é decrescente no domínio todo.

Exemplos

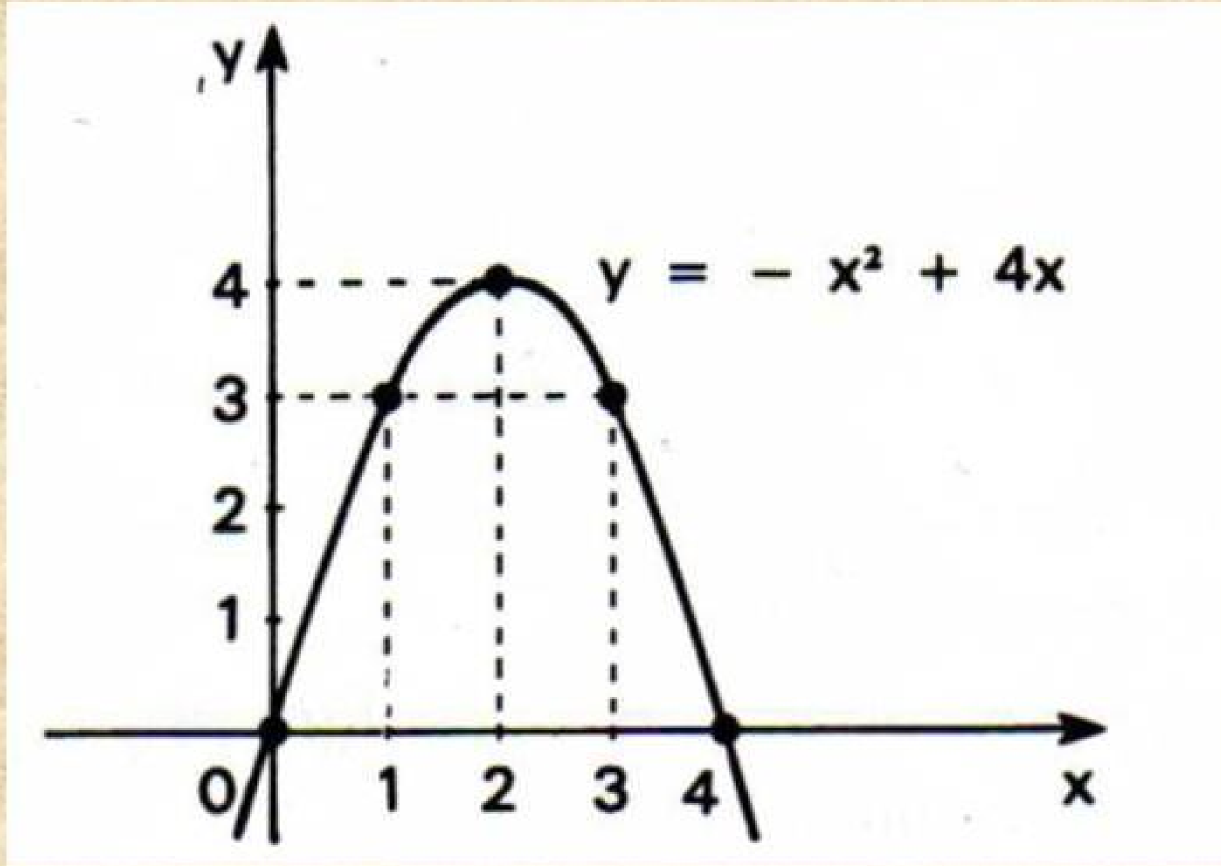
1. A função afim $y = x + 1$ é crescente. A função $y = -x + 1$ é decrescente.



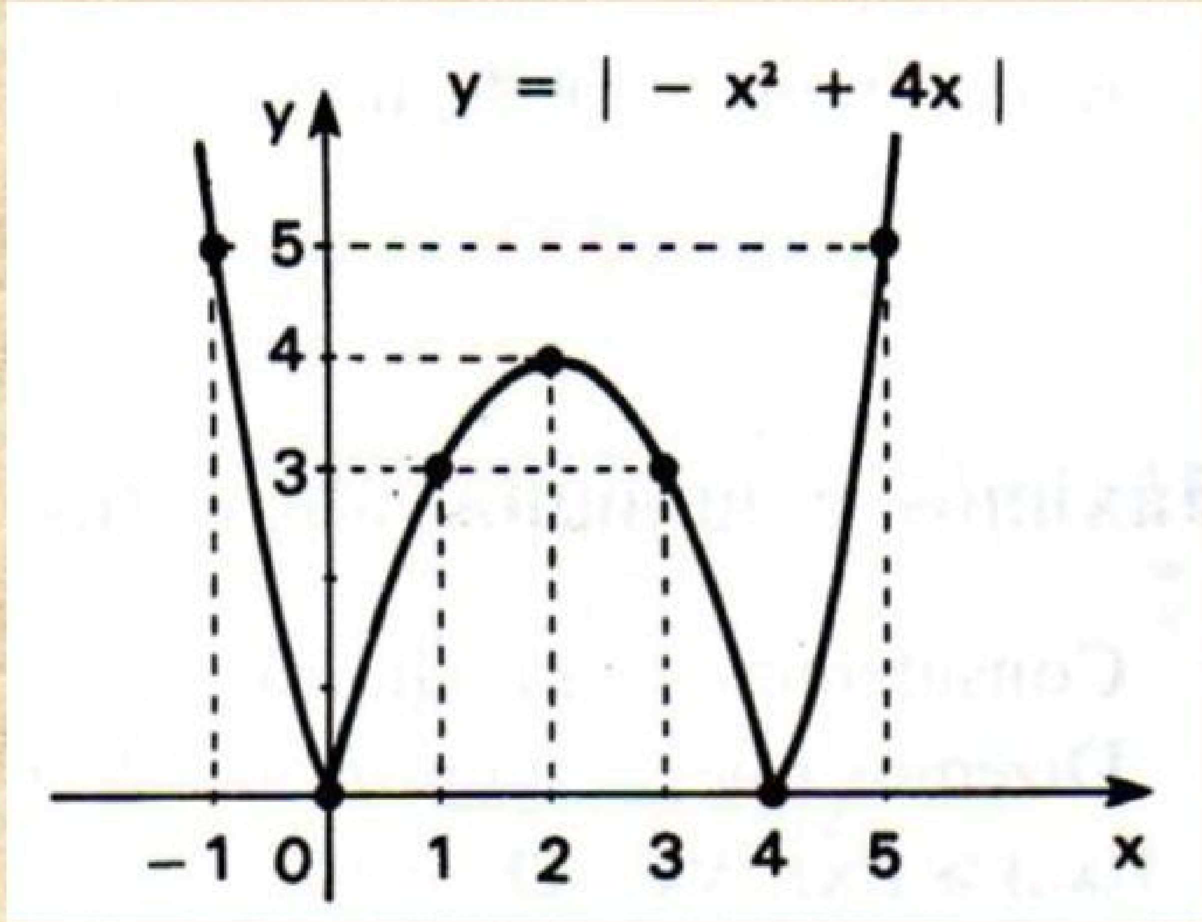
2. A função $f(x) = 1 + |x|$, $x \in R$, é decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, +\infty[$. Observe que falamos em função crescente ou decrescente **num intervalo** e não em um ponto. Neste exemplo, o ponto $x = 0$ está no intervalo $]-\infty, 0]$, em que f é decrescente, e também em $[0, +\infty[$, onde f é crescente.



3. A função f(x) = $-x^2 + 4x$, x ϵ R, é crescente no intervalo]–∞, 2] e é decrescente no intervalo [2, +∞[.



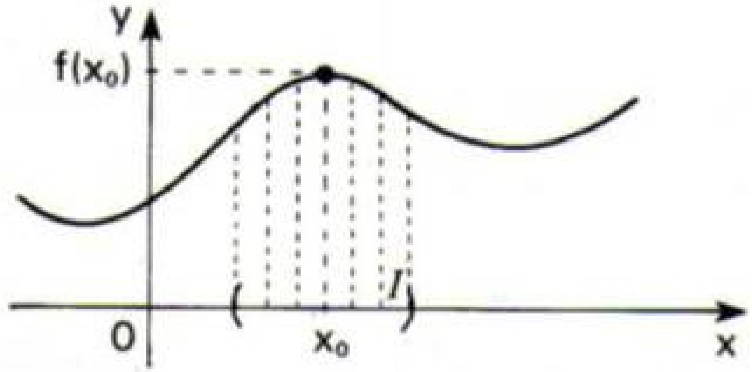
4. A função f(x) = $\left|-x^2 + 4x\right|$, x ϵ R, é decrescente nos intervalos]–∞, 0] e [2, 4] e é crescente no intervalo [0, 2] e [4, +∞[.



Máximos e Mínimos relativos

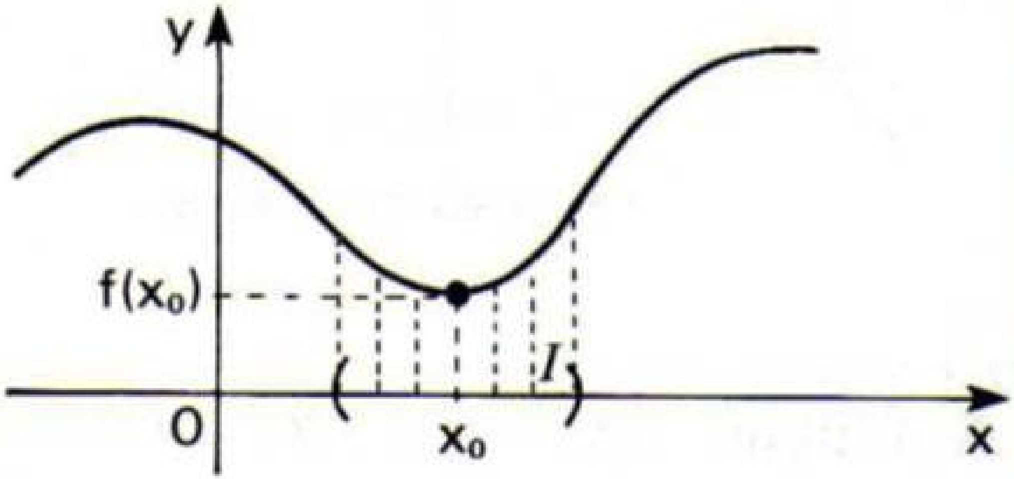
Consideremos uma função real f que é definida num ponto x_o e num intervalo contendo x_o.

Dizemos que x_o é um **ponto de máximo** relativo (ou **máximo** local) de f quando $f(x_o)$ é o maior valor de "nas proximidades" de x_o. Mais precisamente, x_o é um ponto de máximo local de f quando há um intervalo aberto I contendo x_o tal que $f(x_o) \geq f(x), \forall x \in I \cap D(f)$. Neste caso, dizemos que $f(x_o)$ é um **valor máximo local** (ou **relativo**) de f.



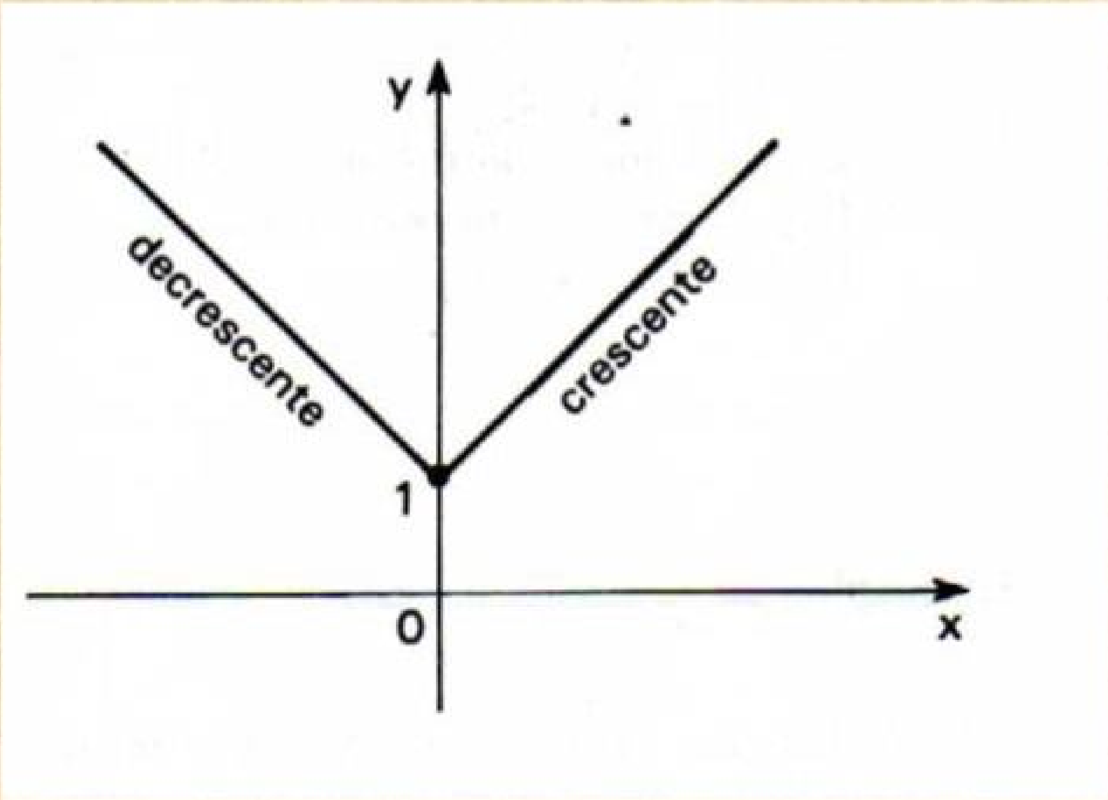
x_0 é um ponto de máximo local de f
$f(x_0)$ é um valor máximo local de f
$f(x_0) \geqslant f(x), \forall x \in I$

Dizemos que x_o é um **ponto de mínimo** relativo (ou **mínimo** local) de f quando há um intervalo aberto I contendo x_o tal que $f(x_o) \leq f(x), \forall\ x \in I \cap D(f)$. Neste caso, $f(x_o)$ é um **valor mínimo local** (ou **relativo**) de f.

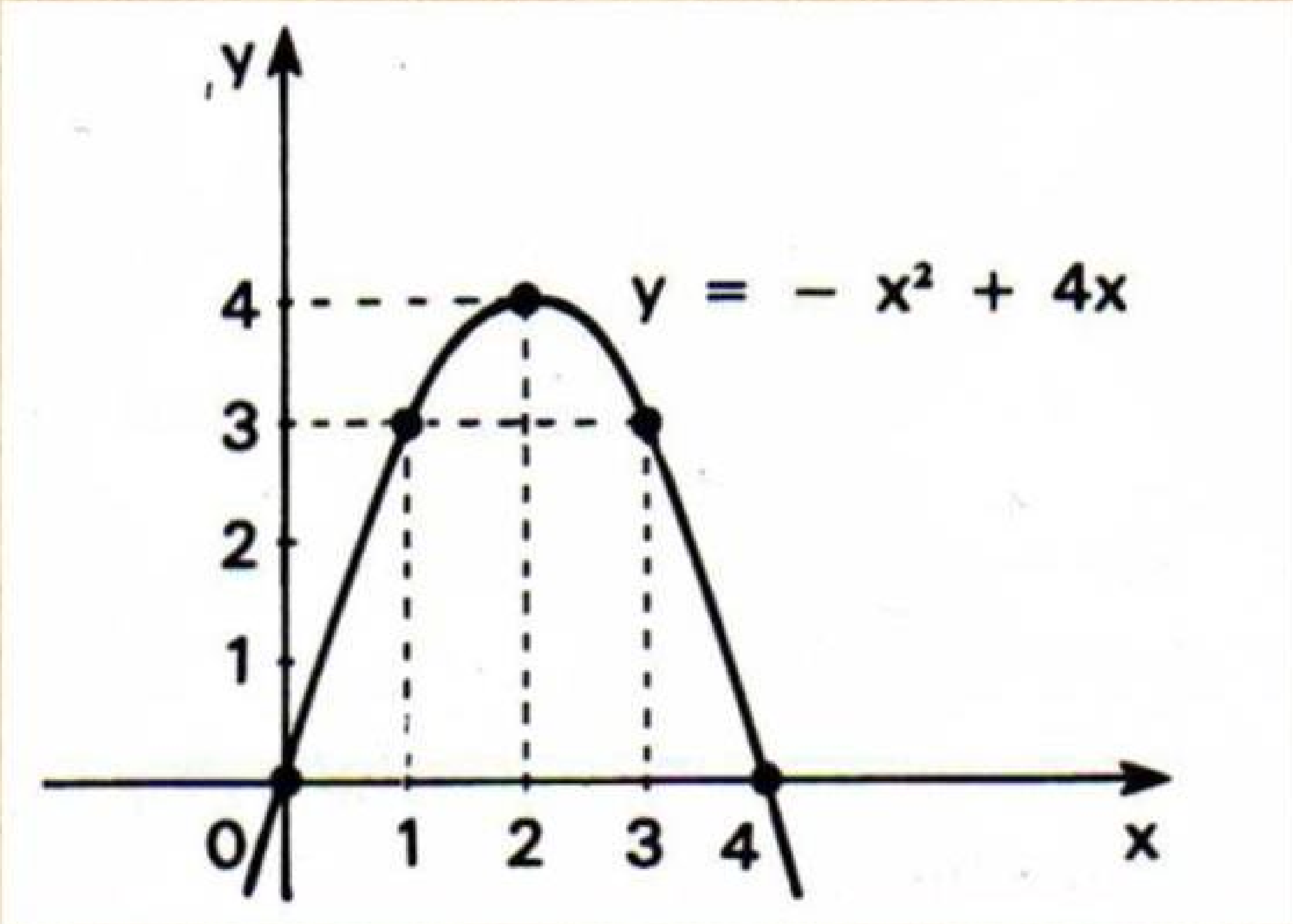


x_0 é um ponto de mínimo local de f
$f(x_0)$ é um valor mínimo local de f
$f(x_0) \leqslant f(x), \forall\ x \in I$

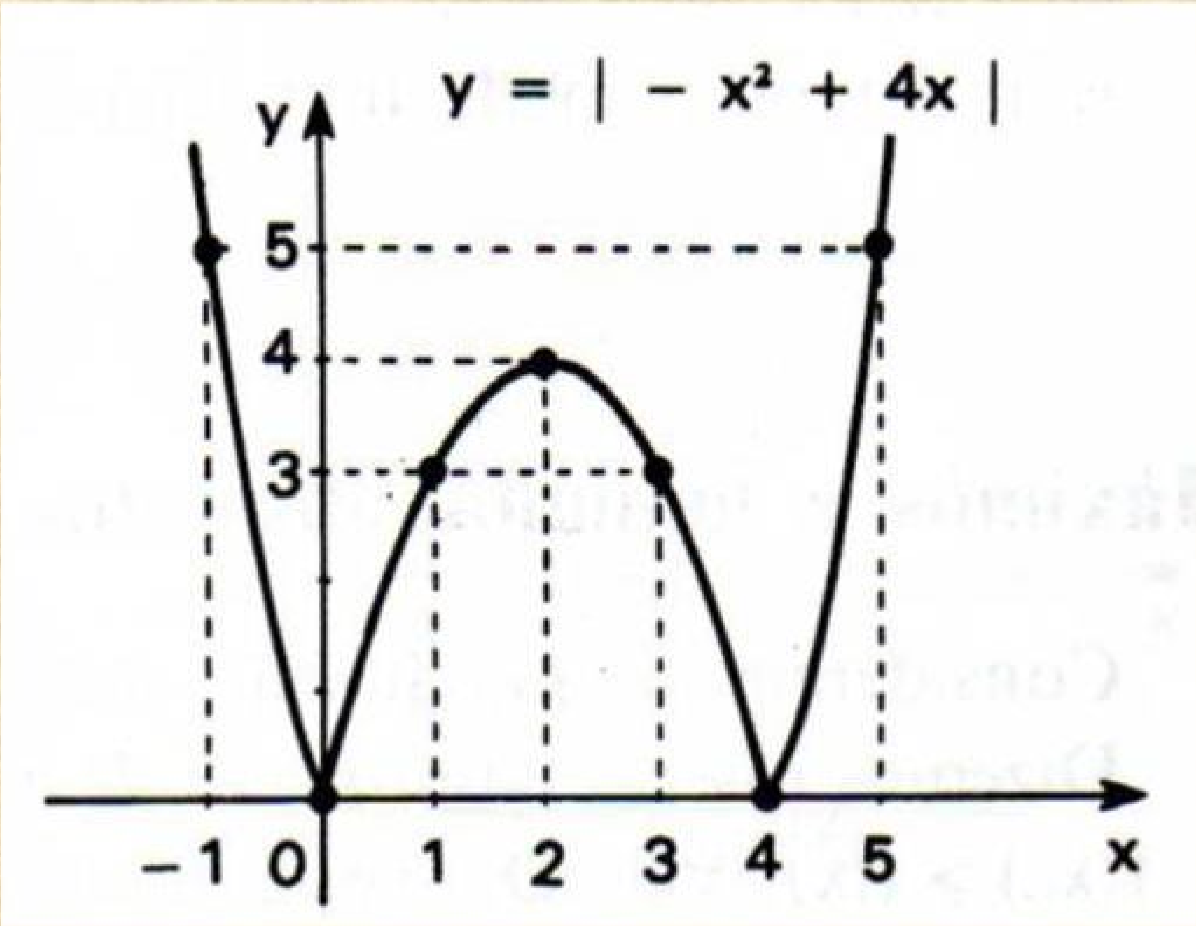
5. A função $f(x) = 1 + |x|$, $x \in R$, tem um ponto de mínimo local, $x = 0$. O valor mínimo local de f é $f(0) = 1$.



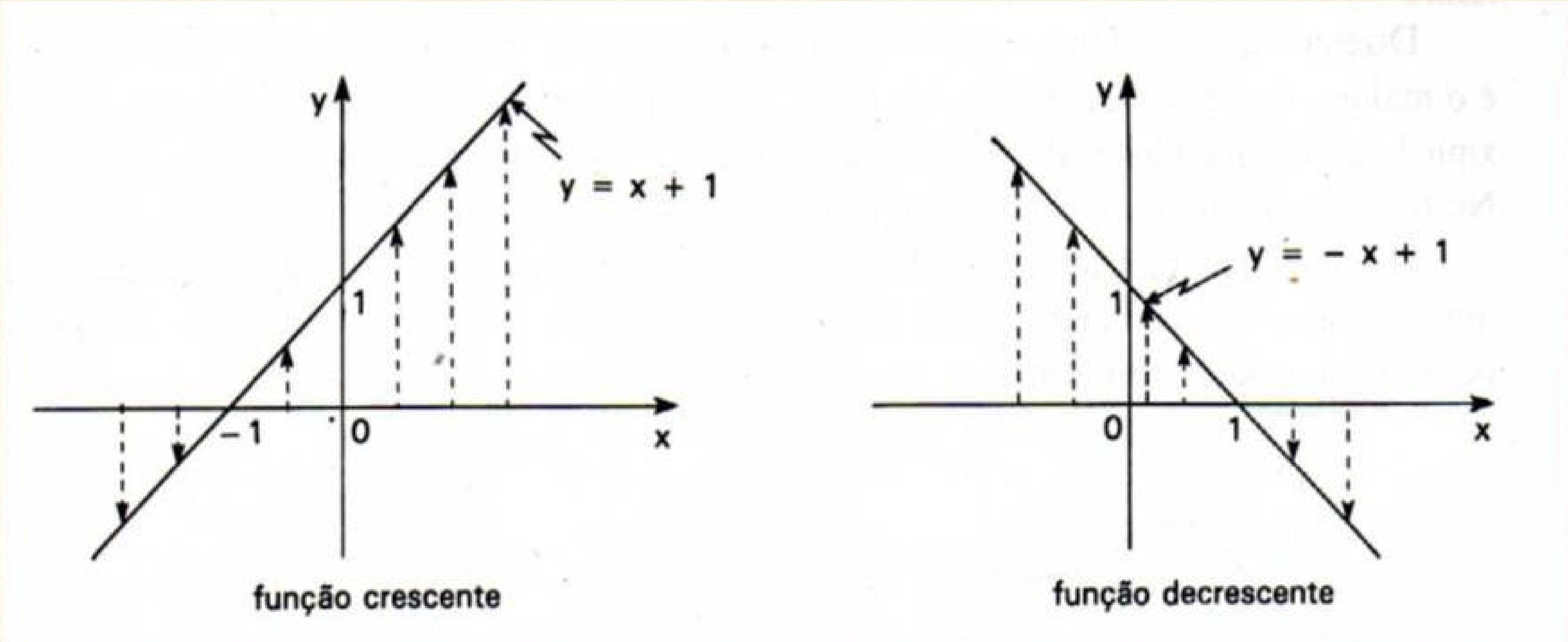
6. A função f(x) = $-x^2 + 4x$, x ϵ R, tem um ponto de máximo local, x = 2. O valor máximo local de f é f(2) = 4.



7. A função $f(x) = \left|-x^2 + 4x\right|$, $x \in R$, os pontos $x_0 = 0$ e $x_1 = 4$ são pontos mínimos locais e o ponto $x_2 = 2$ é de máximo local. Os valores mínimos locais de f são $f(0) = 0$ e $f(4) = 0$. O valor máximo local de f é $f(2) = 4$.



8. As funções y = x + 1 e y = –x + 1, definidas em R, não têm pontos de mínimos nem de máximos locais.



Máximos e Mínimos absolutos

Consideremos uma função real definida no domínio D.

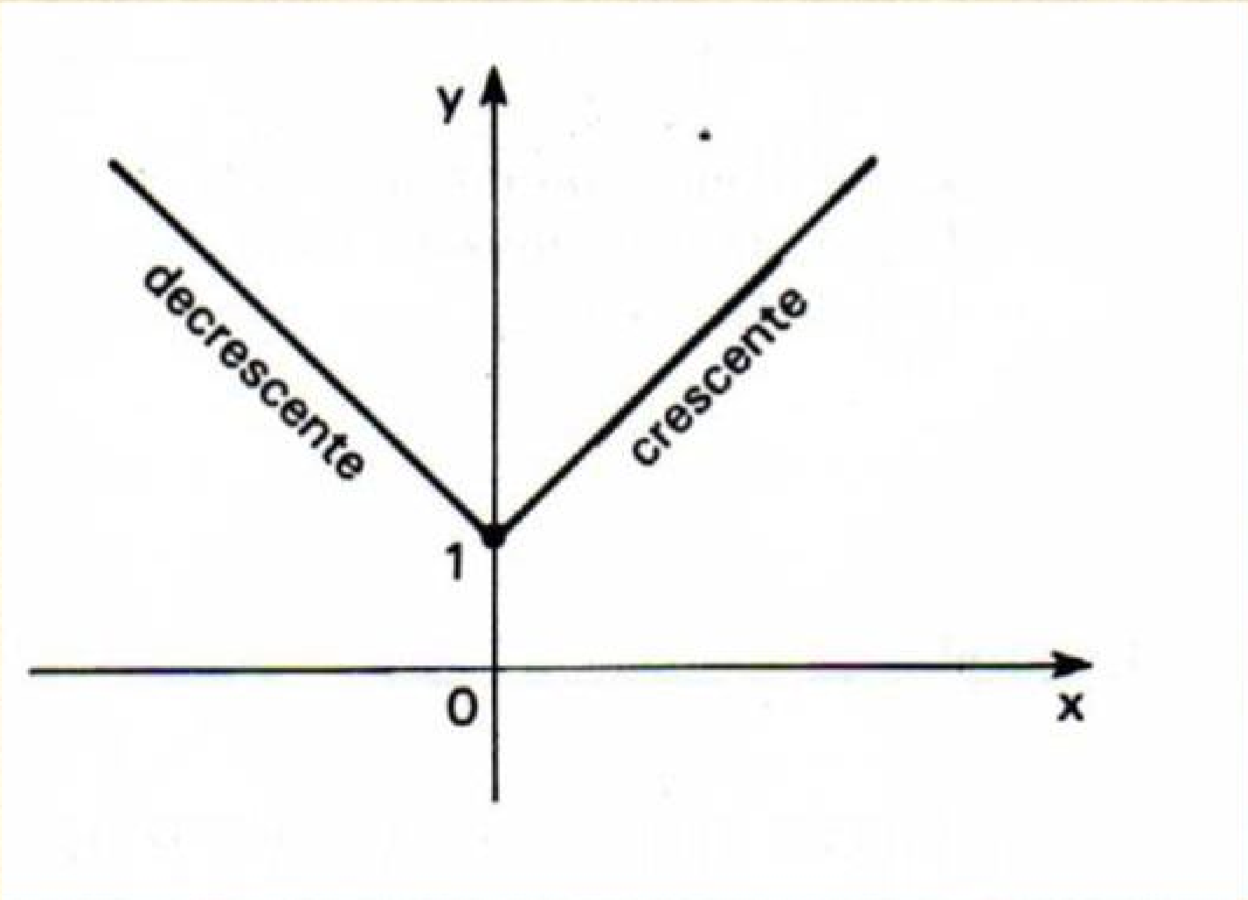
Dizemos que x_o é um **ponto de máximo de f** (ou **ponto de máximo absoluto de f**) quando $f(x_o) \geq f(x)$, $\forall$ $x \in D$. Neste caso, $f(x_o)$ é o **valor máximo** de f.

Dizemos que x_o é um **ponto de mínimo de f** (ou **ponto de mínimo absoluto de f**) quando $f(x_o) \leq f(x)$, $\forall$ $x \in D$. Neste caso, $f(x_o)$ é o **valor máximo** de f.

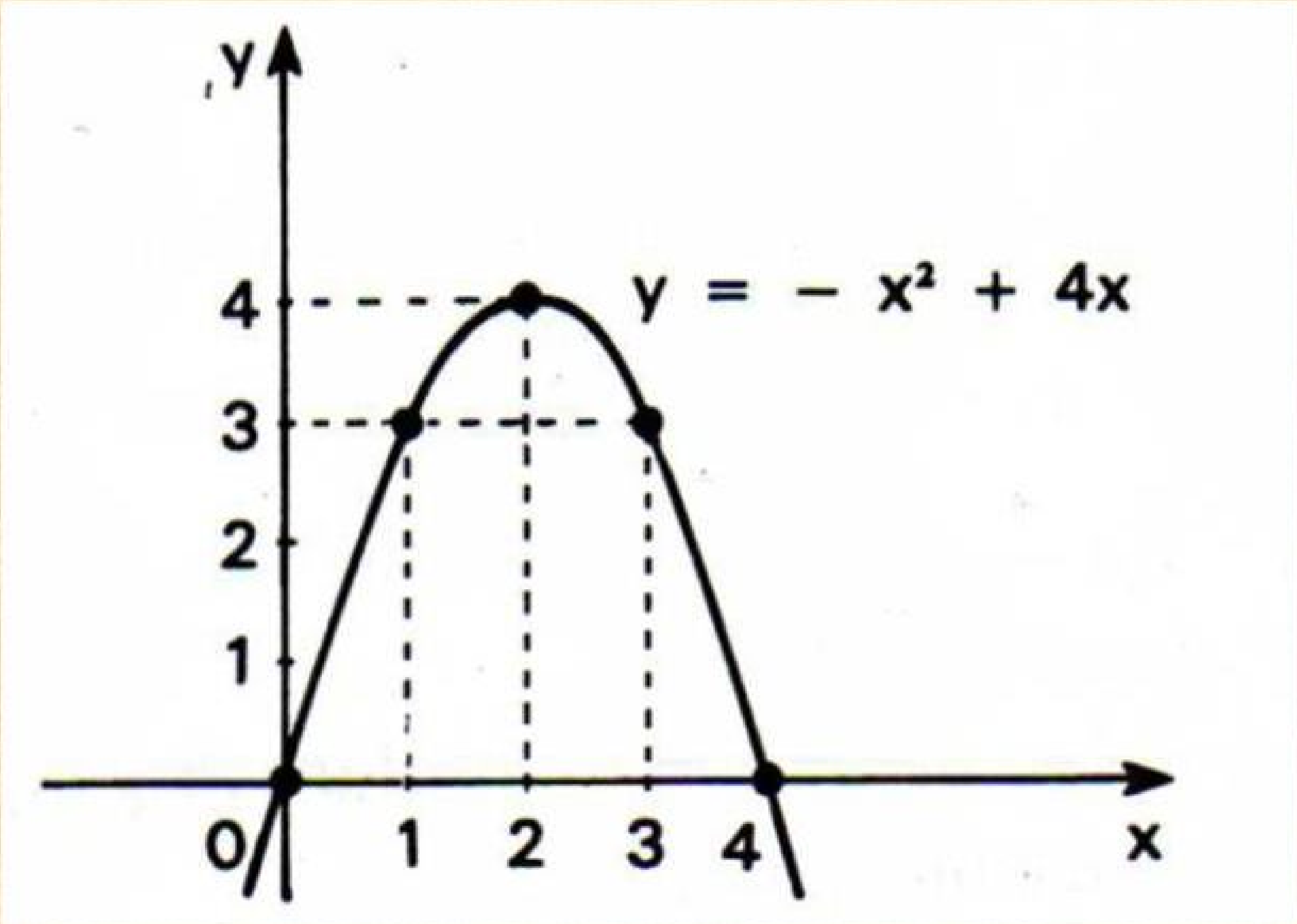
Pode ocorrer que uma função não tenha valor máximo ou não tenha valor mínimo ou não tenha ambos.

Exemplos

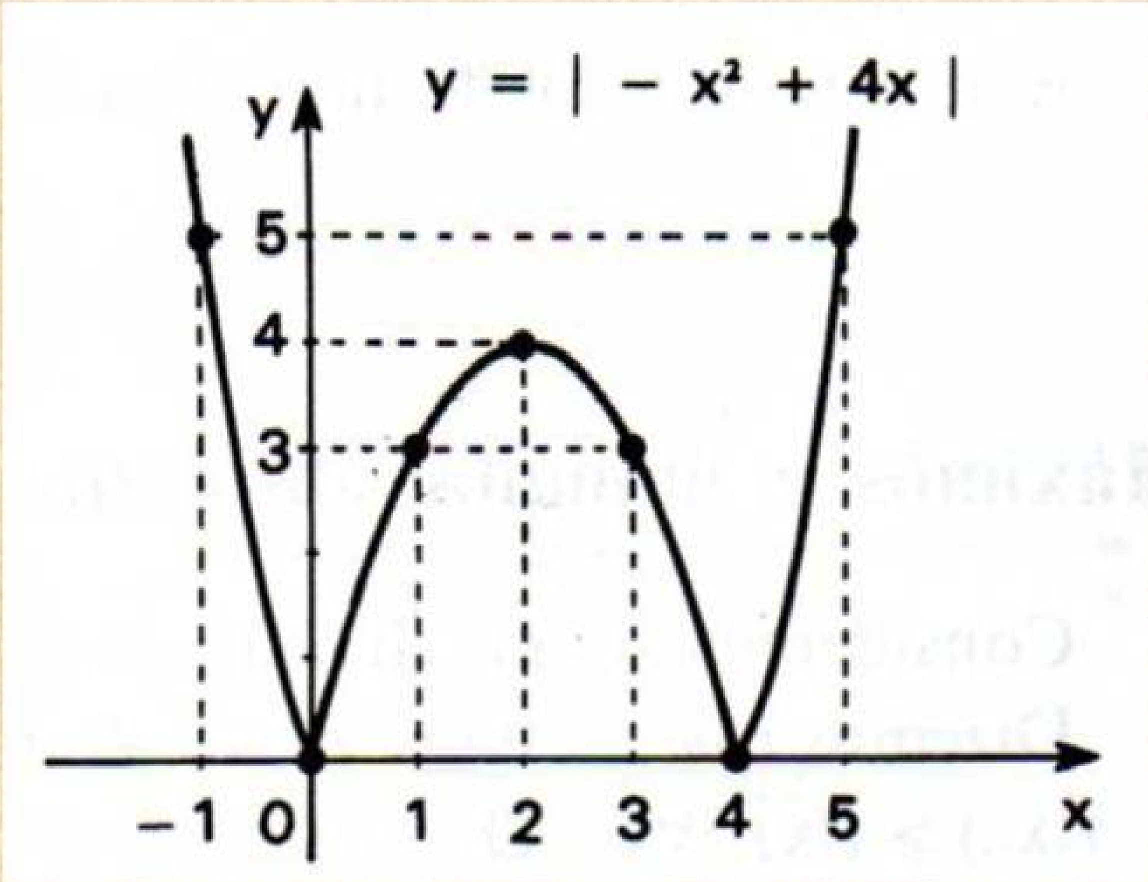
9. A função $f(x) = 1 + |x|$, $x \in R$, tem um ponto de mínimo absoluto, $x = 0$. O valor mínimo de f é $f(0) = 1$. Esta função não tem um valor máximo.



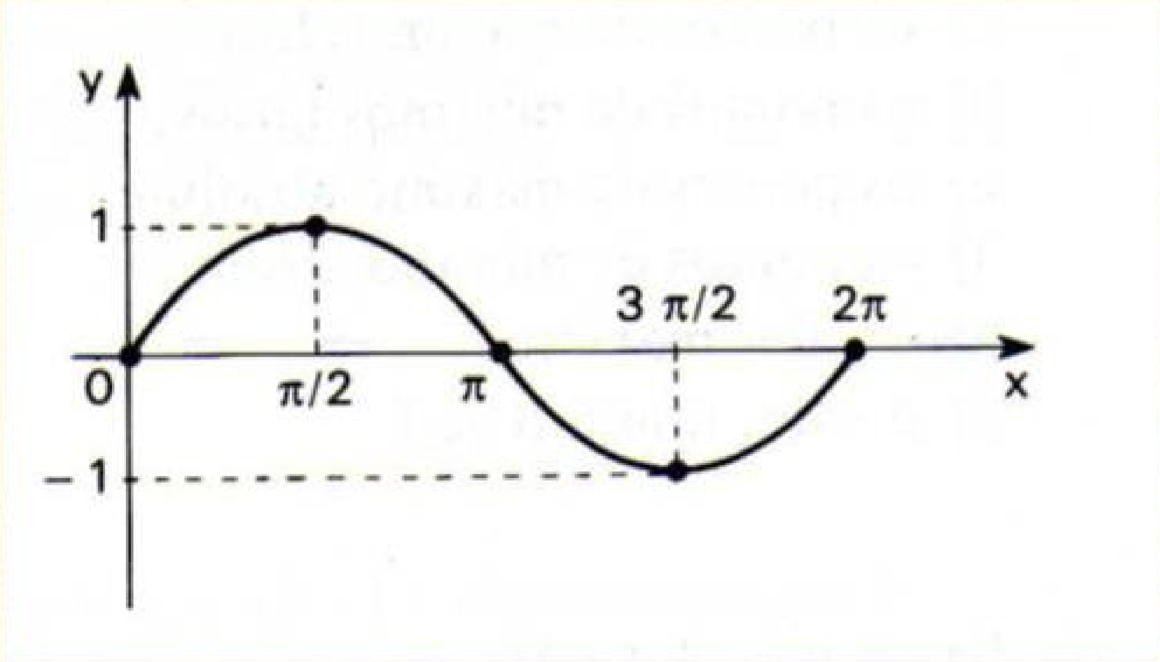
10. A função f(x) = $-x^2 + 4x$, $x \in R$, tem um ponto de máximo absoluto, x = 2. O valor máximo de f é f(2) = 4. Esta função não tem valor mínimo.



11. A função f(x) = $\left|-x^2 + 4x\right|$, x ϵ R, tem dois pontos de mínimo absoluto, x = 0 e x = 4. O valor mínimo de f é f(0) = f(4) = 0. Esta função ***não*** tem valor máximo absoluto (embora tenha um máximo relativo em x = 2).



12. A função y = sen x, x ϵ [0, 2π], tem:



a) máximos locais em $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = 2\pi$;

b) mínimos locais em $x = 0$ e $x = \frac{3\pi}{2}$;

c) máximo absoluto em $x = \frac{\pi}{2}$;

d) mínimo absoluto em $x = \frac{3\pi}{2}$;

e) valor máximo $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$;

f) valor mínimo $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$.